基礎ゼミ I 問題 11　　2019 年 6 月 24 日

**問 11.1.** 正方行列 $A$ がある $k \in \mathbf{N}$ に対して $A^k = O$ であるとき、$(I+A)^{-1}$ を求めよ。

**問 11.2.** 正則行列 $A, B$ に対して、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ。また、$A$ が正則であれば ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ となることを示せ。

**問 11.3.** $(m,n)$ 行列 $A$ が $\operatorname{rank} A \leq m-1$ を満たせば正方行列 $B$ で $BA = O$ となるものが存在することを示せ。

**問 11.4.** 次の行列の行列式の値を求めよ。ただし (9), (10) は $n$ 次正方行列とする。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ b & b & x & b \\ c & c & c & x \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**問 11.5.** $f(x) = x^2$, $[0,1]$ を $n$ 等分する分割 $\Delta_n$ に対し、微積の教科書 p.76 の定理 1 の $\overline{R}(\Delta_n, f)$, $\underline{R}(\Delta_n, f)$ を求め、$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を計算せよ。

**問 11.6.** $[0,1]$ 上 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$ で定義される関数は、(Riemann) 可積分でないことを示せ。[*1]

**問 11.7** (Hölder の不等式)**.** $f(x), g(x)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続で、$p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$ を示せ。(ヒント: 問 8.5 の $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ を用いよ。)

**問 11.8.** $n$ 次多項式 $p(x)$ に対して $\displaystyle\int p(x)e^{-x}\,dx = -\{p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x)\}e^{-x} + C$ となることを示せ。

**問 11.9.** $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ($a > 0$, $n$ は自然数) について、次を示せ。

$$I_1 = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, \quad I_n = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\} \ (n \geq 2).$$

**問 11.10.** 問 11.9 を用いて不定積分 (1) $J_4 = \displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2+1)^4}$,　(2) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^3}$ を求めよ。

**問 11.11.** $\dfrac{1}{(2x-1)(x^2+3)} = \dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+3}$ をみたす定数 $A, B, C$ を求め、$\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)(x^2+3)}$ を求めよ。

**問 11.12.** $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3}$ をみたす定数 $A, B, C, D$ を求め、$\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ を求めよ。

[*1] 3 年次で学ぶ Lebesgue(ルベーグ) 積分では、積分ができて値は 0 になる。