

問 10.1. $f(x)$ が n 回微分可能とすると、 $\left\{x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ となることを示せ。

問 10.2. $f(x) = \tan^{-1} x$ について、 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$, $n \geq 2$, を示し、 $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k(2k)!$ ($k \geq 1$) となることを示せ。

定義. $n \in \mathbf{N}$ に対して、Legendre(ルジャンドル) の多項式 $P_n(x)$, Hermite(エルミート) の多項式 $H_n(x)$, Laguerre(ラゲール) の多項式 $L_n^\alpha(x)$, ($\alpha > -1$) をそれぞれ次の式で定義する。^{*1}

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

問 10.3. $P_n(x)$ は n 次多項式であること、及び、 $(x^2 - 1)P_n(x)'' + 2xP_n(x)' - n(n+1)P_n(x) = 0$ を示せ。

問 10.4. $P_n(x) = 0$ は $(-1, 1)$ において相異なる n 個の根をもつことを示せ。

問 10.5. (1) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ を示し、 $H_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ。

(2) $H_n(x)' = 2nH_{n-1}(x)$ を示し、 $H_n(x)'' - 2xH_n(x)' + 2nH_n(x) = 0$ を示せ。

問 10.6. $L_n^\alpha(x)$ は n 次の多項式となること、及び、 $xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' + nL_n^\alpha(x) = 0$ を示せ。

問 10.7. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ とする。^{*2}

(1) $x > 0$ で $f^{(n)}(x) = \frac{p_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ で、 $p_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の多項式になることを示せ。

(2) 上の結果を用いて、 $f^{(n)}(0) = 0$ および $\lim_{x \rightarrow +0} f^{(n)}(x) = 0$ を示せ。

問 10.8. $f(x)$ が点 (a, b) で C^2 -関数であって、 $c \in (a, b)$ とするとき、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} = f''(c)$ を示せ。

問 10.9. $f(x)$ が 2 回微分可能で平均値の定理 $f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta_h h)$ ($0 < \theta_h < 1$) に対し、 $f''(x)$ が $x = a$ で連続で $f''(a) \neq 0$ であるとき、 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h$ を求めよ。

問 10.10. $2 < e < 3$ を知っているとして、 e^x に Maclaurin の定理を用いることにより、 e が無理数であることを示せ。

問 10.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n!e) = 0$ を示せ。

問 10.12 (Newton の一般化された二項定理). α を実数とする。 $f(x) = (1+x)^\alpha$ に Maclaurin の定理を適用し、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$$

を導け。ただし剰余項 $R_n(x)$ は Lagrange の剰余項、Cauchy の剰余項の 2 通りを述べよ。ここで、 $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha \in \mathbf{R}$ と定める。

問 10.13. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ とおく。 $\log \frac{100}{3} \doteq 3.51$ を用いて、 $5.01 < a_{100} < 5.35$ を示せ。

^{*1} 文献によっては、これらの定義は定数倍違っていることがある。

^{*2} この問題の結果から、 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ は、帰納的に $f^{(n)}(0) = 0$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくことにより、全ての階数の導関数が連続になる。また、この関数の Maclaurin 展開式は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots = 0$ となり、原点以外では、元の関数と一致しない。自然に現れる関数の Maclaurin 級数は、通常は収束半径内ではもとの関数に一致するが、このようにそうではない関数も人工的に作るができる。なぜ、このようなことになるのかは、3 年次で勉強する複素関数論 (解析学 I, II) で明らかになる。また、この問題の形の関数を利用して、「1 の分解」というものが作られ、幾何学 (多様体論) をはじめ様々な応用される。