基礎ゼミ I　問題 9　　　2019 年 6 月 10 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 9.1. 基本変形を使って係数行列の逆行列を求め、次の連立方程式を解け ($cf.$ 教科書 p.35)。

(1) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ -2y + z = 2 \\ 3y + z + w = 3 \\ 4y + w = 4 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + 2y + w = 2 \\ x + y - z + 3w = 0 \\ 2x + 5y + 5w = 1 \\ 2x + 4y - z + 6w = 9 \end{cases}$

問 9.2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とする。このとき $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)I$ を示せ。これより、A が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であり、$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\tilde{A}$ となる。

問 9.3. A, B が正則行列ならば、$P = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ は正則であって、$P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問 9.4. 問 9.2 と問 9.3 を用いて次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

問 9.5. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathrm{sgn}(\sigma_1)$, $\mathrm{sgn}(\sigma_2)$, $\mathrm{sgn}(\tau)$ を求めよ。　(2) ${\sigma_1}^2$, ${\sigma_2}^3$ を求めよ。　(3) τ^2, τ^4 を求めよ。

(4) $\sigma_1\rho = \sigma_2$ をみたす置換 ρ を求めよ。

問 9.6. $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ であることを示せ。

問 9.7. n 文字の置換のうち、遇順列及び奇順列の個数は等しく共に $\dfrac{n!}{2}$ 個ずつあることを示せ。

問 9.8. 次の行列の行列式を、行列式の定義を用いて求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x + a_1 \end{pmatrix}$

問 9.9. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して $(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ の行列式が $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2$ となることをサラスの方法を用いて示せ。

問 9.10. 次の行列式の値をサラスの方法で求めよ。

(1) (a) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2-i & 1-2i \end{vmatrix}$　(b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　(2) (a) $\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-2i \end{vmatrix}$　(b) $\begin{vmatrix} 1+i & i & 1-i \\ -1 & i & 0 \\ 2 & 1+i & 0 \end{vmatrix}$