基礎ゼミ I　問題 8　　2019 年 6 月 3 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 8.1. 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算せよ ($a, b > 0$ は定数)。ヒント: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

(1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = a\sinh t \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

問 8.2. $f(x)$ を区間 (a, b) 上の関数とし、$a < c < b$ となる点 $x = c$ で $f(x)$ は微分可能であるとする。$f(x)$ が $x = c$ で極値をとれば $f'(c) = 0$ となることを示せ。

問 8.3. 両辺の導関数が一致することを示し、(平均値の定理を用いて) 次を示せ。

(1) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x > 0)$　(2) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x \in \mathbf{R})$

(3) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\sin^{-1} x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

問 8.4. 次の不等式を示せ。

(1) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $x < \sin^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}x \quad (0 < x < 1)$

(3) $x - \dfrac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x \quad (x > 0)$　(4) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad (a < b)$

(5) $0 < a < b < 1$ のとき、$p > q > 0$ ならば $\dfrac{b^p - a^p}{b^q - a^q} < \dfrac{p}{q}$.

問 8.5. $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、$\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0$ $(x \geq 0)$ を示せ。また、これより $a > 0, b > 0$ ならば $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ となることを示せ。

問 8.6. $f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ の増減を調べることにより、$m > n > e$ ならば、$m^n < n^m$ となることを示せ。

問 8.7. $f(x)$ が (a, ∞) で微分可能で、$\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$ であるとき、$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1) - f(x)\} = l$ であることを示せ。

問 8.8. 次の極限値を求めよ。ただし、l'Hoptal の定理を用いるときは、不定形であることを明記せよ。($a > 0$ は定数。)

(1) (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{-a}e^{-\frac{1}{x}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

(3) (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{ax - (\log x)^2\right\}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{\cot x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(5) (a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\tan x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^a e^{-(\log x)^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(7) (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\left(x\tan x - \frac{\pi}{2}\sec x\right)$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{\frac{1}{x}}$

問 8.9. 次の関数の n 次導関数を求めよ。ヒント: (4), (5) は Leibniz の公式 (cf. 教科書 p.62) を用いよ。

(1) $\dfrac{1}{1-2x}$　(2) $\sin^3 x$　(3) $e^x \cos x$　(4) $x^3 e^{2x}$　(5) $x^2 \sin 3x$　(6) $x^{n-1}\log x$