基礎ゼミ I 問題 7　　2019 年 5 月 27 日

問 7.1. 次の同次連立 1 次方程式系が非自明な解 (すなわち $x = y = z = 0$ ではない解) をもつ条件を定数 a を用いて述べ、解をもつときの解を求めよ。

(1) $\begin{cases} -x + 2y + az = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \\ 3x - ay + 2z = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ 4x + ay + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ ax + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

問 7.2. 次の 1 次方程式系をはきだし法を用いて解け。a, b は定数とする。
注意: a, b の値によっては非自明な解をもつこともあるので、場合分けして考えよ。

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 5z = 2a - 1 \\ 3x + ay + 8z = 2a + 4 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 9y + 7z = 3 \\ ay + 2z = b \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$

問 7.3. 次の行列の階数 (rank) をはきだし法で計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 13 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

問 7.4. 次の行列 A の階数を求めよ。注意: (1), (2) は定数 a によって場合分けして階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a-3 \\ 1 & 1 & a+1 & -2 \\ 1 & a+2 & 1 & -3 \\ a+1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \\ a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} i & 1-i & 3 & -i \\ 1+i & i & -i & 2-i \\ 1-i & -2+3i & -6-2i & 2+i \\ 2+i & -1+3i & -3-2i & 4-i \end{pmatrix}$

問 7.5. 次の行列が基本変形を用いて正則か否かを調べ、正則ならば逆行列を求めよ。また、(1)–(4) はそこで用いた左基本変形を表す行列 (*cf*. 線形代数の教科書 p.24) を述べ、逆行列をその基本行列の積で表せ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ 6 & 8 & -9 & -12 \end{pmatrix}$