基礎ゼミ I　問題 5　　2019 年 5 月 13 日

問 5.1. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ を求めよ。

問 5.2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ と可換な 2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ を求めよ。また、2 次正方行列 X,Y がともに A と可換であれば、X と Y は可換となることを確認せよ。

問 5.3. 次の条件を満たす 2 次正方行列 A をすべて決定せよ。注意: I は単位行列を表す。

(1) $A^2=A$　　(2) $A^2+I=0$

問 5.4. 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して、Cayley-Hamilton の公式 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=O$ を示せ。O は零行列を表す。

問 5.5. 次を求めよ。(ヒント: Cayley-Hamilton の公式と問 5.6 の計算法を用いよ。)

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ のとき A^7,　(2) $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ のとき B^7,　(3) $C=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$ のとき $C^n, n\in\mathbf{N}$.

問 5.6. $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&-3\\3&0&4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0&-2&6\\2&5&-3\\-2&-1&7\end{pmatrix}$ とする。

(1) $A^3-3A^2+3A=O$ を示し、A^8 を A^3-3A^2+3A で割りその余りを計算することで、A^8 を求めよ。

(2) $B^3-2B^2+2B-I=O$ を示し、$B^{10}-B^9+B^8$ を求めよ。

(3) $(C-I)(C-4I)=O$ を示し、C^5 を求めよ。

(4) 自然数 n に対して $(D-4I)^n$ を計算し、D^n を求めよ。(ヒント: $D-4I$ と $4I$ は可換なので二項定理より $D^n=\{(D-4I)+4I\}^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(D-4I)^k(4I)^{n-k}$ となることを用いよ。)

問 5.7. n 次正方行列 A,B に対して、$[A,B]=AB-BA$ とおく (これを A,B の交換子積という)。

(1) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O$ が成立することを示せ (これを Jacobi(ヤコビ) の恒等式という)。

(2) ${}^tA=-A$ となる行列を交代行列という。A,B ともに交代行列であれば、$[A,B]$ も交代行列であることを示せ。

問 5.8. 次の連立一次方程式をはきだし法を用いて解け。

(1) $\begin{cases}x-y+2z=0\\2x+y+4z=9\\-x+3y-3z=4\\-2x+2y-4z=0\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x-y=-2\\3x-y+z=-2\\2x-y+2z=-1\\y-z=1\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x+2y-2z+v+3w=2\\2x+y+2z+w=3\\-2x-3y+2z-v-4w=1\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x+2y-z+3v-2w=1\\2x+4y+z+3v-3w=2\\-x-2y+2z-4v-w=1\\3x+6y+6v-5w=3\end{cases}$　(5) $\begin{cases}2x+4y+z-w=1\\x+2y-z+w=2\\2x+y+z+2w=-2\\x+3y+2z-3w=0\end{cases}$

(6) $\begin{cases}x+z+2w=6\\-2x+y+4z+w=3\\4x-3y-4z+w=-3\\-x+y+2z+w=4\end{cases}$　(7) $\begin{cases}x+2y-z+3v+4w=5\\z-2v+4w=-2\\2x+4y-z+3v+2w=5\end{cases}$

(8) $\begin{cases}x-2y+z+4w=3\\-2x+5y-3z+10w=-3\\3x-7y+4z-14w=0\end{cases}$　(9) $\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+y+3z=0\\-2x+3y+z=1\end{cases}$　(10) $\begin{cases}x-2y+z+5w=3\\x-2y+2z+2w=-1\\2x-4y+3z+7w=2\end{cases}$