

基礎ゼミ I 問題 4 2019 年 5 月 6 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 4.1.  $a_0, a_1, p, q$  を実数とし、 $n \geq 2$  に対して  $a_n$  を漸化式  $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , によって定め、 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  とおく。このとき、 $p^2 + 4q < 0$  であれば数列  $\{b_n\}$  は発散することを示せ。

問 4.2. (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c$  が存在して  $c < 1$  ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  を示せ。

(2) 正の数からなる数列  $\{a_n\}$  について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$  が存在して  $c > 1$  ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  を示せ。

問 4.3. 数列  $\{a_n\}$  について、ある実数  $0 < L < 1$  があって、すべての  $n \in \mathbf{N}$  に対して  $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq L|a_{n+1} - a_n|$  が成立すると仮定する。このとき、 $\{a_n\}$  は Cauchy 列 (cf. 微分積分学の教科書 p.21) となることを示せ。

問 4.4. 問 4.3 を用いて次で定義される数列  $\{a_n\}$  が Cauchy 列となることを示し、その極限を求めよ。

(1)  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 2}, a_1 = p > 0,$

(2)  $a_{n+2} = (1 - c)a_{n+1} + ca_n, a_1 = p, a_2 = q,$  ただし、 $c, p, q$  は実数で、 $c$  は  $0 < |c| < 1$  を満たす。

ヒント:  $a_{n+2} + ca_{n+1} = a_{n+1} + ca_n = \dots = a_2 + ca_1$  で  $n \rightarrow \infty$  とすれば極限值がわかる。

定義 ( $\varepsilon$ - $\delta$  論法 1).  $x$  が  $\alpha$  に近づくとき (ただし  $x \neq \alpha$ )、関数  $f(x)$  が実数  $a$  に収束するとは、任意の正数  $\varepsilon$  に対してある ( $\varepsilon$  から定まる) 正数  $\delta$  が存在して、 $0 < |x - \alpha| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$  が成立することと定義する。このとき  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a$ , あるいは  $f(x) \rightarrow a (x \rightarrow \alpha)$  と表す。

$f(x)$  が収束しないとき、 $f(x)$  は発散するという。

定義 ( $\varepsilon$ - $\delta$  論法 2).  $x$  が  $\alpha$  に近づくとき (ただし  $x \neq \alpha$ )、関数  $f(x)$  が  $\infty$  に発散するとは、任意の正数  $K$  に対してある ( $\varepsilon$  から定まる) 正数  $\delta$  が存在して、 $0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) > K$  が成立することと定義する。このとき  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty$ , あるいは  $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \alpha)$  と表す。

問 4.5. (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  の  $\varepsilon$ - $\delta$  論法による定義を書け。

問 4.6. (a)  $\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) (= \lim_{x \downarrow \alpha} f(x)) = a$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow \alpha-0} f(x) (= \lim_{x \uparrow \alpha} f(x)) = \infty$  の  $\varepsilon$ - $\delta$  論法による定義を書け。

問 4.7.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a$  の必要十分条件は  $x_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty), x_n \neq \alpha (n = 1, 2, \dots)$  なる任意の数列  $\{x_n\}$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$  であることを示せ。

問 4.8.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = b$  とする。  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いて (問 4.7 を用いずに) 次を示せ。

(1) (a)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = |a|,$  (b)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) = ab,$  (3)  $b \neq 0$  のとき  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b},$  (4)  $f(x) \leq g(x)$  のとき  $a \leq b$

注意: 問 4.7 を用いると、教科書第 1 章の数列に関する定理 1-5 から上記が成立することが直ちに従う。

問 4.9. 次の極限值を求めよ。ただし、 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e$  は既知とする。

(1) (a)  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{|x^2 - x - 2|}$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$  (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{1-x}}$

(2) (a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$  (c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2\sin x}{h^2}$

(3) (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)}$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

問 4.10.  $\mathbb{R}$  で定義された連続関数  $f(x)$  が  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  を満たすとすると、定数  $a$  が存在して、 $f(x) = ax$  となることを示せ。(注意: 一般には、 $f(x+y) = f(x) + f(y)$  を満たしても  $f(x) = ax$  とならない例が知られている。)