基礎ゼミ I　問題 3　　　**2019 年 4 月 22 日**

記号. 行列 $A = (a_{ij})$ に対して A の転置行列を ${}^tA = (a_{ji})$ と、A の複素共役行列を $\overline{A} = (\,\overline{a_{ij}}\,)$ と表す。$\overline{a_{ij}}$ は a_{ij} と共役な複素数を表す。また、I は単位行列 (教科書 p.16) を表す。

問 3.1. (1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1+i \\ 3 \end{pmatrix}$ にうつし、ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ にうつす一次変換 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ とその表現行列を求めよ。

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ にうつし、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ にうつし、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ にうつす一次変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ とその表現行列を求めよ。

問 3.2. xy 平面上の点 (x, y) に対して直線 $y = mx$ について対称な点の座標を (x', y') とする。このとき、x', y' を x, y, m を用いた式で表せ。また、これによりベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を直線 $y = mx$ について対称なベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ にうつす変換が一次変換であることを示し、その表現行列を求めよ。

問 3.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AB + AC$, $A(B + C)$ を計算し比較せよ。　(2) $C(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}) - (2B)A$ を計算せよ。　(3) $A\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}B)\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

問 3.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次を計算せよ。

(1) $AB - BA$,　(2) $BC - CB$,　(3) $A^2 - B^2$,　(4) $(A + B)(A - B)$,　(5) $ABC - AC$,
(6) $(A + {}^tA)(A - {}^tA)$,　(7) $C\,{}^tC$ と ${}^tCC$,　(8) $A\,{}^tB$ と ${}^tBA$,　(9) $CA - C$ と $C(A - I)$

問 3.5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ。　(2) $YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ。

問 3.6. $A = (a_{ij})$ を (m, n) 型行列、$B = (b_{ij})$ を (n, r) 型行列とする。${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^tA$ との (i, j) 成分をそれぞれ求め、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を示せ。

問 3.7. 任意の 3 次正方行列 X と可換な 3 次正方行列は $A = aI$ に限ることを証明せよ。
ヒント: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とし、$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合に、それぞれ $AX = XA$ を計算することで a_{ij} たちの満たすべき条件をまず調べよ。

問 3.8. $A = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 1+5i & 2-3i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, とする。次を計算し比較せよ。

(1) ${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^tA$,　(2) ${}^t(\overline{B}\,{}^tA)$ と $A\,{}^t\overline{B}$

問 3.9. $A = \begin{pmatrix} i & 1-i & -i \\ 2 & i & 3 \\ 0 & 1+i & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ とする。次を求めよ。

(1) $A + {}^t\overline{A}$ と $A - {}^t\overline{A}$,　(2) $A\,{}^t\overline{A}$,　(3) ${}^t\overline{A}\,A$,　(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を満たす縦ベクトル $\boldsymbol{x}$

問 3.10. (m, n) 型行列 $A = (a_{ij})$ に対して、$B = A\,{}^t\overline{A}$ とおく。B の (k, l) 成分を求め、${}^t\overline{B} = B$ が成立することを示せ。また、特に B の対角成分が非負であることを確認せよ。