基礎ゼミ I 問題 1　　**2019 年 4 月 8 日**

記号. $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ は自然数の全体、$\mathbb{Z}$ は整数の全体、$\mathbb{Q}$ は有理数の全体、$\mathbb{R}$ は実数の全体、$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す。

問 1.1. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2$ を示せ。

問 1.2. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}\leqq \dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$ が成り立つこと、等号は $x=0$ または $y=0$ のときのみに成り立つこと、を示せ。

問 1.3. 次の集合 A の内部、境界、閉包を求めよ。
(1) $A=\left\{\dfrac{n-1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$　(2) $A=(0,1]$　(3) $A=(0,1)\cap\mathbb{Q}=\{\,x\in\mathbb{Q}\,|\,0<x<1\,\}$

問 1.4. 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(解き方は裏面を見よ。)
(1) $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n,\ a_1=1, a_2=1,$　(2) $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n,\ a_1=1, a_2=1$
(3) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\ a_1=1, a_2=1,$　(4) $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n,\ a_1=1, a_2=1$

問 1.5. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ に対して次を示せ。
(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき、$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ が成立することを余弦定理から導け。
(2) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積 S について $S^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$.
(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ がそれぞれ直交する。

問 1.6. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0\\-1\\u\\2\end{pmatrix}$ とする。
(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求め、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を図示することで、この順で右手系であることを確かめよ。
(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の張る平行六面体の体積 V を求めよ。
(3) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ となるように u の値を定めよ。
(4) $\|\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}\|^2$ を u,t の関数と見なすとき、その最小値とそのときの u,t の値を求めよ。

問 1.7. n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ について、$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つこと、等号は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ (零ベクトル) または $\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x}$ となる実数 k が存在するときであることを示せ。

問 1.8. 2 つの変量 x,y の n 個のデータ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ を考え、x, y の平均, 標準偏差をそれぞれ $\overline{x}, s_x, \overline{y}, s_y$ とし, x と y の共分散, 相関係数を s_{xy}, r で表す。また、データ $x_1,x_2,\ldots,x_n$, と $y_1,y_2,\ldots,y_n$, を縦に並べた n 次元ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とし、すべての成分が 1 である縦ベクトルを $\mathbf{1}$ で表す。次の問いに答えよ。ただし、$s_x>0, s_y>0$ とする。
(1) $s_x^2=\dfrac{1}{n}\|\boldsymbol{x}-\overline{x}\mathbf{1}\|^2$, $s_y^2=\dfrac{1}{n}\|\boldsymbol{y}-\overline{y}\mathbf{1}\|^2$, $s_{xy}=\dfrac{1}{n}(\boldsymbol{x}-\overline{x}\mathbf{1})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{y}\mathbf{1})$ であることを確認し、$-1\leqq r\leqq 1$ となること、および、$r=\pm1$ ならある実数 $k(\neq 0)$ があって $y_i-\overline{y}=k(x_i-\overline{x})$, $i=1,2,\ldots,n$ であり、$r=1$ なら $k>0$, $r=-1$ なら $k<0$ となることを示せ。(ヒント: 問 1.7 を用いよ。)
(2) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(\alpha+\beta x_i)\}^2$ を最小にする α,β をそれぞれ $\overline{x},\overline{y},s_x,s_y,r$ を用いて表せ。この直線 $y=\alpha+\beta x$ を y の x への回帰直線という。

- 漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ の解き方: 特性方程式 $x^2=px+q$ の根を α,β とすると、

$\alpha\neq\beta$ のとき、$a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$ が、
$\alpha=\beta$ のとき、$a_n=c_1\alpha^n+c_2n\alpha^{n-1}$ が

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=-q$ に注意すると、$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ より

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \text{ と変形でき、}\quad a_{n+1}-\alpha a_n=(a_1-\alpha a_0)\beta^n \ \cdots\ \text{(I)}$$
$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \text{ と変形でき、}\quad a_{n+1}-\beta a_n=(a_1-\beta a_0)\alpha^n \ \cdots\ \text{(II)}$$

よって、$\alpha\neq\beta$ なら、(II) から (I) を引き、$\alpha-\beta$ で割ることで、$a_n=\dfrac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta}\alpha^n-\dfrac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta}\beta^n$ を得る。

$\alpha=\beta$ のときは (I) と (II) は同じ式になってしまうが、$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_1-\alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を α^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha}\quad\text{となり、}\quad \frac{a_n}{\alpha^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}}-\frac{a_k}{\alpha^k}\right)+\frac{a_0}{\alpha^0}=n\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha}+a_0.$$

よって、$a_n=(a_1-\alpha a_0)n\alpha^{n-1}+a_0\alpha^n$ となることが従う。
注意: ここでは a_1,a_0 の値を与えて解いているが、問 1.4 では a_2,a_1 の値を与えていることに注意せよ。

- 漸化式 $a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3=px^2+qx+r$ の根を α,β,γ とすると、

α,β,γ がすべて異なるとき、　$a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n+c_3\gamma^n$,
$\alpha=\beta\neq\gamma$ (一組のみ重根) のとき、　$a_n=c_1\alpha^n+c_2n\alpha^{n-1}+c_3\gamma^n$,
$\alpha=\beta=\gamma$ (3 重根) のとき、　$a_n=c_1\alpha^n+c_2n\alpha^{n-1}+c_3n(n-1)\alpha^{n-2}$

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、$b_n=a_{n-1},\ c_n=a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n+rc_n \\ b_{n+1}=\ \ a_n \\ c_{n+1}=\ \ b_n \end{cases}\qquad\text{すなわち}\qquad \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q&r\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 A と縦ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に関する漸化式 $\boldsymbol{x}_{n+1}=A\boldsymbol{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、$\boldsymbol{x}_n=A^n\boldsymbol{x}_0$ となり、行列の n 乗に関する問題となる。行列の n 乗についての一般的な計算法は、α,β,γ がすべて異なる (対角化可能な場合) とき線形代数の教科書第 6 章で学ぶ。一般の場合は教科書 v ページの参考文献 [1] のジョルダン標準形の章を参照せよ。
注意: 上記のような単独の漸化式の一般項を求めるためには、A^n そのものを求めるのは避け、A^n に関する結果を利用できることのみを使って、上記のように表せるとして解けばよい。