

問 13.1. (m, n) 行列 A が $\text{rank } A \leq m-1$ を満たせば正方形行列 B で $BA = O$ となるものが存在することを示せ。

問 13.2. 次の各組のベクトルが、一次従属となるように x, y の値を定めよ。

(1) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 3), \mathbf{a}_2 = (x, 0, 0, 2), \mathbf{a}_3 = (-1, 1, -1, x), \mathbf{a}_4 = (3, -5, 1, -8)$

(2) $\mathbf{b}_1 = (1, 1, -2, 1), \mathbf{b}_2 = (1, -2, x, 1), \mathbf{b}_3 = (-2, 1, 1, y)$

問 13.3. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立のとき、 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + k\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + k\mathbf{c}$ が一次従属となるような k の値を求めよ。

例. $\mathbf{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする。点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、ベクトル \mathbf{n} に垂直な平面の方程式は、

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \tag{1}$$

と表される。特に、 $ax + by + cz = d$ は平面の方程式となる。 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ を平面 (1) の法線ベクトルという。

証明 これは平面上の点を $P(x, y, z)$ とすると、ベクトル $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ とベクトル \mathbf{n} が直交しているため、その内積が 0 になることより (1) は従う。次の式は $d = ax_1 + by_1 + cz_1$ とすれば (1) より得られる。□

問 13.4. $A(1, 2, -1), B(3, -1, 0), C(2, -3, -1)$ とする。直線 AB に垂直で点 $(1, -1, 2)$ を通る平面 (A) と、3 点 A, B, C を通る平面 (B) の方程式を求めよ。

問 13.5. (1) 平面 $x - 2y - z - 6 = 0$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

(2) 点 $(1, 2, 3)$ から平面 $3x + y - 2z + 29 = 0$ までの距離を求めよ。

問 13.6 (ヘッセの標準形). 原点から平面 (H) に下した垂線の長さを p とするとき、その平面の方程式は

$$lx + my + nz = p, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

と表されることを示せ。

問 13.7. 同一平面上にない 3 点 $P_1(a_1, b_1, c_1), P_2(a_2, b_2, c_2), P_3(a_3, b_3, c_3)$ を通る平面の方程式は

$$(1) \begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \\ x - a_2 & y - b_2 & z - c_2 \\ x - a_3 & y - b_3 & z - c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2) \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ で与えられることをそれぞれ示せ。}$$

例. ベクトル $\mathbf{k} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ に平行で、点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通る直線の方程式は、 $\mathbf{p} = (x, y, z), \mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ とするとき、 $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{k} (t \in \mathbf{R})$ 、成分で表わすと

$$x = x_1 + at \quad y = y_1 + bt \quad z = z_1 + ct$$

と媒介変数表示される。これから、 t を消去し、 $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ とも表わされる。このベクトル \mathbf{k} を直線の方角ベクトルという。

問 13.8. $A(1, 2, 3), B(2, -1, 5)$ とする。2 点 A, B を通る直線 l_1 と点 A を通り平面 $x + 2y - z = 3$ に垂直な直線 l_2 の方程式を求めよ。

問 13.9. 直線 $x - 1 = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 4}{2}$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

問 13.10. (1) 2 つの平面 $-x + 3y - 5z = 1, 2x - y - z = 3$ のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

(2) 2 つの直線 $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4}, x - 1 = \frac{2 - y}{10} = \frac{-z}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

問 13.11. 2 つの平面 $3x - 2y + z = -4, x + y - z = 1$ に共通して含まれる直線の方程式を求めよ。

問 13.12. 平面 (H) $x + 2y + 3z = 5$ に関して点 $A(2, 1, 5)$ と対称な点 A' の座標を求めよ。また、その点 A' と点 $B(6, 6, 5)$ を結ぶ直線 $A'B$ の方程式と、その直線と平面 (H) との交点の座標を求めよ。