基礎ゼミ I　問題 12　　　**2018 年 7 月 2 日**

問 12.1. $[0,1]$ 上 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$ で定義される関数は、(Riemann) 可積分でないことを示せ。[*1]

問 12.2. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ のとき、$[a,b]$ 上で $f(x) \equiv 0$ を示せ。

問 12.3. $f(x)$ を連続関数とする。$g(x) = \displaystyle\int_{x+1}^{x^2} f(t)\,dt$ とおくとき $g'(x)$ を求めよ。また、$h(x) = \displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)\,dt$ とおくとき $h''(x) = f(x)$ を示せ。

問 12.4. $p(x)$ を n 次多項式とするとき $\displaystyle\int p(x)e^{-x}\,dx = -\{p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x)\}e^{-x} + C$ を示せ。

問 12.5. $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ($a > 0$, n は自然数) について、次を示せ。

$$I_1 = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, \quad I_n = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\}\ (n \geq 2).$$

問 12.6. 問 12.5 を用いて不定積分 (1) $I_4 = \displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2+1)^4}$,　(2) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^3}$ を求めよ。

問 12.7. $\dfrac{1}{(2x-1)(x^2+3)} = \dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+3}$ をみたす定数 A, B, C を求め、$\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)(x^2+3)}$ を求めよ。

問 12.8. $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3}$ をみたす定数 A, B, C, D を求め、$\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ を求めよ。

問 12.9. 次の関数の原始関数を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$	(2) $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x+1)}$	(3) $\dfrac{1}{x^4+1}$
(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$	(5) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$	(6) $\dfrac{x}{\sqrt{2+x-x^2}}$
(7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$	(8) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$	(9) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$
(10) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$	(11) $\dfrac{1}{1+2\cos^2 x}$	(12) $\cos^{-1} x$
(13) $x^2 \sin^{-1} x$	(14) $x\tan^{-1} x$	(15) $\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}$

問 12.10. 次の定積分を求めよ。ただし、(4), (7) で $a > 0$, (6) で $0 < a < 1$ とする。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$	(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$	(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^3}$
(4) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx$	(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x+1}\,dx$	(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a\cos x}\,dx$
(7) $\displaystyle\int_0^a \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx$	(8) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx$	(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$
(10) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$	(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}\,dx$	(12) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x(4-x)}\,dx$

問 12.11. (1) $I_n = \displaystyle\int \tan^n x\,dx$ について、$I_n = \dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$, $n \neq 1$, を導け。

(2) n を非負整数とするとき、$J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$ の値を n を用いて表せ。

[*1] 3 年次で学ぶ Lebesgue(ルベーグ) 積分では、積分ができて値は 0 になる。

問 12.9 ヒント:

(1) $x^3 \div (x^2 - x - 2) = (\text{商}) \ \cdots \ (\text{余り})$ より、$\dfrac{x^3}{x^2 - x - 2} = (\text{商}) + \dfrac{(\text{余り})}{x^2 - x - 2}$ とし、右辺の分数式を部分分数展開せよ。

(2) (1) と同様。

(3) $\dfrac{1}{x^4 + 1} = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2 - 2x^2} = \dfrac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \dfrac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ と部分分数展開する。

(5) $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$, (6) $t = \sqrt{\dfrac{1 + x}{2 - x}}$, (8) $t = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$ と置換せよ。

(9), (10) は $t = \tan \dfrac{x}{2}$ と、(11) は $t = \tan x$ と置換せよ。

(12) $\displaystyle\int \cos^{-1} x \, dx = \int (x)' \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x - \int x (\cos^{-1} x)' \, dx$ と部分積分法を用いる。

(13)–(15) (12) と同様に部分積分法を用いる。

問 12.10 ヒント:

(1) $t = x^{1/4}$, (3) $x = \sqrt{3} \tan \theta$, (4) $u = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$, (5) $t = \tan x$ (6) $t = \tan \dfrac{x}{2}$, (7) $\theta = \sin^{-1} \sqrt{\dfrac{x}{x + a}}$ と置換せよ。

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u) \, du = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$ となることを用いよ。

(11) まず (10) のヒントの式が使えるように変形せよ。