基礎ゼミ I 問題 11 **2018 年 6 月 25 日**

問 11.1. 正方行列 A が、ある $k \in \mathbf{N}$ に対して $A^k = O$ であるとき、$(E+A)^{-1}$ を求めよ。

問 11.2. 正則行列 A, B に対して、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ。また、A が正則であれば ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ となることを示せ。

問 11.3. 次の行列が基本変形を用いて正則か否かを調べ、正則ならば逆行列を求めよ。また、(1)–(4) はそこで用いた左基本変形を表す行列 (*cf.* 教科書 pp.46–47) を述べ、逆行列があればその基本行列の積で表せ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (5)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(6)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

問 11.4. 次の行列 A の階数を求めよ。注意: (1), (2) は定数 a によって場合分けして階数を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a-3 \\ 1 & 1 & a+1 & -2 \\ 1 & a+2 & 1 & -3 \\ a+1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \\ a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} i & 1-i & 3 & -i \\ 1+i & i & -i & 2-i \\ 1-i & -2+3i & -6-2i & 2+i \\ 2+i & -1+3i & -3-2i & 4-i \end{pmatrix}$$

問 11.5. 次 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ に対する連立方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、A の逆行列 A^{-1} を求めて、連立方程式を解け。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ 6 & 8 & -9 & -12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

問 11.6. 次の同次連立 1 次方程式系が非自明な解をもつように定数 a の値を定め、一組の基本解を求めよ。

$$(1)\ \begin{cases} -x + 2y + az = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \\ 3x - ay + 2z = 0 \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x + y + az = 0 \\ 4x + ay + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ ax + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

問 11.7. 次の 1 次方程式系を掃き出し法を用いて解け。a, b は定数とする。
注意: a, b の値によっては非自明な解をもつこともあるので、場合分けして、一般解があればそれを特殊解と同伴な同次連立一次方程式の一次結合の和で表せ。

$$(1)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 5z = 2a-1 \\ 3x + ay + 8z = 2a+4 \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 9y + 7z = 3 \\ ay + 2z = b \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

問 11.8 (Woodbury の公式)**.** n 次正方行列 A, B, U, V および $A + UBV$ が正則のとき、次が成り立つことを示せ。

$$(A+UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

問 11.9 (Sherman-Morrison の公式)**.** A を n 次正方行列、$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を n 次元縦ベクトルとする。A および $A + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{c}$ が正則のとき、次が成り立つことを示せ。

$$(A + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{c})^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + {}^t\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}} A^{-1}\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{c}A^{-1}$$