基礎ゼミ I　問題 10　　2018 年 6 月 18 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 10.1. $2 < e < 3$ を既知として、e^x に Maclaurin の定理を用いることにより、e が無理数であることを示せ。

問 10.2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n!e) = 0$ を示せ。

問 10.3. 次の極限値を求めよ。l'Hoptal の定理を用いるときは、どの不定形であるか明記せよ ($a > 0$ は定数)。

(1) (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{-a}e^{-\frac{1}{x}}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

(2) (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{ax - (\log x)^2\right\}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\tan x}$

(3) (a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\tan x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^a e^{-(\log x)^2}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(4) (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\left(x\tan x - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos x}\right)$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{\frac{1}{x}}$

問 10.4. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$ とする．[*1]

(1) $x > 0$ で $f^{(n)}(x) = \dfrac{p_{n-1}(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$ で, $p_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の多項式になることを示せ。

(2) 上の結果を用いて、$f^{(n)}(0) = 0$ および $\displaystyle\lim_{x\to +0} f^{(n)}(x) = 0$ を示せ。

問 10.5. 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算せよ ($a, b > 0$ は定数)。ヒント: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

(1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = a\sinh t \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

問 10.6. 次を示せ ($a > 0$ は定数)。

(1) 曲線 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ (0 \leq t \leq \pi/2)$ の各点での接線が両軸によって切り取られる部分の長さは一定である。

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 上の点での接線が x 軸, y 軸と交わる点を P, Q と原点 O との距離の和 $\mathrm{OP} + \mathrm{OQ}$ は一定である。

問 10.7. 関数 $f(x)$ が区間 I で 2 回微分可能であるとする。このとき、すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \geq 0$ ならば、すべて $c \in I$ において、$y = f(x)$ のグラフはその点 $(c, f(c))$ における接線より下にはないこと、すなわち、$f(x) \geq f'(c)(x-c) + f(c),\ x \in I$, であることを示せ。

問 10.8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{4n^2 - 1^2} + \sqrt{4n^2 - 2^2} + \cdots + \sqrt{4n^2 - n^2}\right)$ を求めよ。

問 10.9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^3}{(n^2+1^2)^2} + \frac{n^3}{(n^2+2^2)^2} + \cdots + \frac{n^3}{(n^2+n^2)^2}\right\}$ を求めよ。

問 10.10. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とおく。$\log\dfrac{100}{3} \fallingdotseq 3.51$ を用いて、$5.01 < a_{100} < 5.35$ を示せ。

問 10.11 (Hölder の不等式). $f(x), g(x)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続で、$p > 1,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$ を示せ。(ヒント: 問 8.6 の $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ を用いよ。)

[*1] この関数の Maclaurin 展開式は $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots = 0$ となり、原点以外では、元の関数と一致しない。自然に現れる関数の Maclaurin 級数は, 通常は収束半径内ではもとの関数に一致するが、このようにそうではない関数も人工的に作ることができる。なぜ、このようなことになるのかは、3 年次で勉強する複素関数論 (解析学 I, II) で明らかになる。また、この問題の形の関数を利用して,「1 の分解」というものが作られ、幾何学 (多様体論) をはじめ様々に応用される.