基礎ゼミ I　問題 9　　　2018 年 6 月 11 日

問 9.1. (m,n) 型行列 A と (n,m) 型行列 B に対し、$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ を示せ (Tr の定義は教科書 p.43)。

問 9.2. 次の行列式の値を各行各列から 1 つずつとったものの積に符号をつけたものの和であることから求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

問 9.3. 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ b & b & x & b \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$

問 9.4. 次の行列の階数 (rank) を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & -9 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

問 9.5. 次の連立一次方程式を解け。(一般解があればそれを特殊解と同伴な同次連立一次方程式の一次結合の和で表せ。)

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$　(7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = -3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases}$　(9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$　(10) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$