基礎ゼミ I　問題 8　　　2018 年 6 月 4 日

問 8.1. $f(x)$ が n 回微分可能とするとき、$\left\{x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ となることを示せ。

問 8.2. $f(x) = \tan^{-1} x$ について、$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0,\ n \geq 2,$ を示し、$f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k(2k)!\ (k \geq 1)$ となることを示せ。

問 8.3. $f(x)$ を区間 (a,b) 上の関数とし、$a < c < b$ となる点 $x = c$ で $f(x)$ は微分可能であるとする。$f(x)$ が $x = c$ で極値をとれば $f'(c) = 0$ となることを示せ。

問 8.4. 両辺の導関数が一致することを示し、(平均値の定理を用いて) 次を示せ。

(1) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x > 0)$　　(2) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x \in \mathbf{R})$

(3) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1} x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

問 8.5. 次の不等式を示せ。

(1) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$　　(2) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad (x > -1,\ x \neq 0)$

(3) $x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x \quad (x > 0)$　　(4) $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad (x \neq 0)$

(5) $0 < a < b < 1$ のとき、$p > q > 0$ ならば $\frac{b^p - a^p}{b^q - a^q} < \frac{p}{q}$.

問 8.6. $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき、$\frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x \geq 0\ (x \geq 0)$ を示せ。また、これより $a \geq 0, b \geq 0$ ならば $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ となることを示せ。

問 8.7. $f(x) = x^{1/x}\ (x > 0)$ の増減を調べることにより、$m > n > e$ ならば、$m^n < n^m$ となることを示せ。

問 8.8. 次の関数の増減、極大値、極小値、上下への凸、変曲点を調べ、グラフの概形を描け。

(1) $y = \frac{2x}{1+x^2}$　　(2) $y = e^{-x^2/2}$　　(3) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

問 8.9. $f(x)$ が点 (a,b) で C^2-関数であって、$c \in (a,b)$ とするとき、$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} = f''(c)$ を示せ。

問 8.10. $f(x)$ が 2 回微分可能で平均値の定理 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta_h h)\ (0 < \theta_h < 1)$ に対し、$f''(x)$ が $x = a$ で連続で $f''(a) \neq 0$ であるとき、$\lim_{h\to 0}\theta_h$ を求めよ。

問 8.11. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で n 回微分可能とするとき、R_n を

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

で定める。このとき、$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} + R_n \cdot \frac{b-x}{b-a}$ に Rolle の定理を用いることで、$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}(b-a)$ をみたす $c\ (a < c < b)$ が存在することを示せ。この R_n を **Cauchy の剰余項**という。(教科書 pp.56–57 の剰余項を **Lagrange の剰余項**という。)

問 8.12 (Newton の一般化された二項定理)**.** α を実数とする。$f(x) = (1+x)^\alpha$ に Maclaurin の定理を適用し、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k + R_n(x)$$

を導け。ただし剰余項 $R_n(x)$ は Lagrange の剰余項、Cauchy の剰余項の 2 通りを述べよ。ここで、$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \alpha \in \mathbf{R}$ と定める。