基礎ゼミ I　問題 7　　2018 年 5 月 28 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。
行列 A の行列式、 $\det A = |A|$ と両方の記号を使うことにする。$|\det A|$ は A の行列式の値の絶対値を表す。

問 7.1. 次の行列 A と $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して $AX = E$ を満たすように行列 X を定め、A の逆行列を求めよ。ただし、$abc \neq 0$ とする。

(1) (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問 7.2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2,$ に対して、$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と定め、xy-平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ を 3 頂点とする平行四辺形の面積を S、3 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}'(x_1', y_1')$, $\mathrm{Q}'(x_2', y_2')$ を 3 頂点とする平行四辺形の面積を S' とする。$S = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ および $S' = |ad - bc| S (= |\det A| S)$ が成立ことを示せ。

問 7.3. 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{y} = (d, e, f)$ は一次独立、すなわち、$\lambda_1 \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} = (0, 0, 0)$ を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ は $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ に限るとする。このとき、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = (bf - ce, -af + cd, ae - bd)$$

と定義する。次を示せ。

(1) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の双方に直交し、$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす平行四辺形の面積に等しい。

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ はこの順序で右手系をなす、即ち、$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ bf - ce & cd - af & ae - bd \end{vmatrix}$ が正となる。(ヒント: サラスの方法でこの行列式を計算し、それが $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|^2$ に等しいことを示せ。)

問 7.4. 次の行列式の値をサラスの方法で求めよ。

(1)　(a)　$\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2-i & 1-2i \end{vmatrix}$　(b)　$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　(2)　(a)　$\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-2i \end{vmatrix}$　(b)　$\begin{vmatrix} 1+i & i & 1-i \\ -1 & i & 0 \\ 2 & 1+i & 0 \end{vmatrix}$

問 7.5. 次の行列の逆行列をその行列式と余因子行列を計算することで求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} i & -1 & i \\ -1 & 1 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問 7.6. 次の 1 次方程式系をクラメルの公式を用いて解け。

(1) $\begin{cases} 2x + y + 4z = -1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 5 \\ x - 4y - 2z = 7 \\ -x + 2y + z = 9 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ 9x + 4y + 16z = 25 \end{cases}$

問 7.7. 次の 6 次の行列式 $\det[a_{ij}]$ において、次の項につける符号は何か。

(a) $a_{16}a_{24}a_{35}a_{43}a_{52}a_{61}$　(b) $a_{12}a_{23}a_{36}a_{41}a_{54}a_{65}$　(c) $a_{13}a_{26}a_{32}a_{45}a_{51}a_{64}$

問 7.8. $\mathrm{sgn}(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ であることを示せ。

問 7.9. $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列のうち、遇順列及び奇順列の個数は等しく共に $\dfrac{n!}{2}$ 個ずつあることを示せ。