基礎ゼミ I　問題 5　　　2018 年 5 月 14 日

問 5.1. 数学的帰納法を用いて次を示せ。ヒント: ${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$

(1) (二項定理)　行列 A, B が可換であるとき、$(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k A^k B^{n-k}$.

(2) (Leibniz の公式)　$f(x), g(x)$ が n 回微分可能なとき、$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

問 5.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ を求めよ。

問 5.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ。また、2 次正方行列 X, Y がともに A と可換であれば、X と Y は可換となることを確認せよ。

問 5.4. 次の条件を満たす 2 次正方行列 A をすべて決定せよ。

(1)　$A^2 = A$　　　　(2) $A^2 + E = 0$

問 5.5. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、Cayley-Hamilton の公式 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ を示せ。E は単位行列、O は零行列を表す。

問 5.6. 次を求めよ。ヒント: Cayley-Hamilton の公式と問 5.8 の計算法を用いよ。

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき A^6,　(2)　$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき B^7, B^8,　(3)　$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき C^n, $n \in \mathbf{N}$.

問 5.7. $A = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$ に対して、A^2, A^3, A^{-1} を求めよ。ヒント: Cayley-Hamilton の公式を用いよ。

問 5.8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $A^2 - A - 2E = O$ を示し、A^7 を $A^2 - A - 2E$ で割りその余りを計算することで、A^7 を求めよ。

(2) $B^3 - 3B^2 + 3B = O$ を示し、B^7 を $B^3 - 3B^2 + 3B$ で割りその余りを計算することで、B^7 を求めよ。

(3) 自然数 n に対して $(C-4E)^n$ を計算し、C^n を求めよ。ヒント: $C - 4E$ と $4E$ が可換であることに注意して二項定理 (問 5.1) を用いよ。

(4) $(D-E)(D-4E) = O$ を示し、D^3, D^{-1}, D^{-2} を求めよ。

問 5.9. n 次正方行列 A に対して、$AY = E$ となる n 次正方行列 Y が存在すれば、A は正則であり $YA = E$ となることを、n に関する数学的帰納法を用いて示せ。

問 5.10. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を計算せよ。また、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件が $ad - bc \neq 0$ であることを示せ。

問 5.11. A, B が正則行列ならば、$P = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ は正則であって、$P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問 5.12. 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$