基礎ゼミ I　問題 4　　　2018 年 5 月 7 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 4.1. a_0, a_1, p, q を実数とし、$n \geqq 2$ に対して a_n を漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ によって定め、$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく。このとき、$p^2 + 4q < 0$ であれば数列 $\{b_n\}$ は発散することを示せ。

問 4.2. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c$ が存在して $c < 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ が存在して $c > 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ。

問 4.3 (Cauchy の収束条件)**.** 数列 $\{a_n\}$ が (ある数) に収束するための必要十分条件は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して $n > m \geqq N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$ となることを示せ。

問 4.4. 数列 $\{a_n\}$ について、ある実数 $0 < L < 1$ があって、すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq L|a_{n+1} - a_n|$ が成立すると仮定する。このとき、$\{a_n\}$ は Cauchy の収束条件を満たすことを示せ。

問 4.5. 問 4.4 を用いて次で定義される数列 $\{a_n\}$ が Cauchy の収束条件を満たすことを示し、その極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 2}$, $a_1 = p > 0$,

(2) $a_{n+2} = (1-c)a_{n+1} + ca_n$, $a_1 = p$, $a_2 = q$, ただし、c, p, q は実数で、c は $0 < |c| < 1$ を満たす。

　　ヒント: $a_{n+2} + ca_{n+1} = a_{n+1} + ca_n = \cdots = a_2 + ca_1$ で $n \to \infty$ とすれば極限値がわかる。

問 4.6. (a) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha-0} f(x) = A$ の ε-δ 論法 (Cauchy の収束性) による定義を述べよ。

問 4.7. (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ の ε-δ 論法 (Cauchy の収束性) による定義を述べよ。

問 4.8. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = B$ とする。ε-δ 論法を用いて次を示せ。

(1) (a) $\displaystyle\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$,　　　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B$,

(2) a 以外のすべての点 x で $f(x) \leqq g(x)$ のとき $A \leqq B$

問 4.9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ $(A \neq 0)$ ならば、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$ を ε-δ 論法を用いて次を示せ。

問 4.10. 次の極限値を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ は既知とする。

(1)　(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{|x^2 - x - 2|}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$　　(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$

(2)　(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$　　(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2\sin x}{h^2}$

(3)　(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x^2-1)}{\sin(x-1)}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

問 4.11. 中間値の定理を用いて、以下を示せ。

(1)　$f(x)$ が $[-1, 1]$ で連続であって $f(1) = f(-1) = 0$ ならば、原点を通る直線は $y = f(x)$ のグラフと交わる。

(2)　閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、$f(a), f(b) \in [a, b]$ ををみたせば、$f(c) = c$ となる $c \in [a, b]$ が存在する。

(3)　区間 I 上の 1 対 1 連続関数は狭義単調である。

問 4.12. (1) $\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x)$ が $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとする。$f(x)$ が $x = 0$ で連続なら、全ての点で連続であることを示せ。

(2) $\mathbf{R}$ で定義された連続関数 $f(x)$ が $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとすると, 定数 a が存在して, $f(x) = ax$ となることを示せ。(注意: 一般には、$f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たしても $f(x) = ax$ とならない例が知られている。)