**基礎ゼミ I　問題 3　　2018 年 4 月 23 日**

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

**記号.** 行列 $A = (a_{ij})$ に対して $A$ の転置行列を ${}^tA = (a_{ji})$ と、$A$ の複素共役行列を $\overline{A} = (\,\overline{a_{ij}}\,)$ と表す。

**問 3.1.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AB+AC$, $A(B+C)$ を計算し比較せよ。　(2) $C(3A)-(2B)A$ を計算せよ。　(3) $A\boldsymbol{y}$, $(\boldsymbol{z}B)\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

**問 3.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次を計算せよ。

(1) $AB - BA$,　(2) $BC - CB$,　(3) $A^2 - B^2$,　(4) $(A+B)(A-B)$,　(5) $ABC - AC$,
(6) $A + {}^tA$ と $A - {}^tA$,　(7) $C\,{}^tC$

**問 3.3.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AX = B$ を満たす行列 $X$ を求めよ。　(2) $YA = C$ を満たす行列 $Y$ を求めよ。

**問 3.4.** $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくとき、(a) $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1+\theta_2)$, (b) ${}^t(A(\theta)) = A(-\theta)$ 示せ。

**問 3.5.** 任意の 3 次正方行列 $X$ と可換な 3 次正方行列は $A = aE = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に限ることを証明せよ。

ヒント: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とし、$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合に、それぞれ $AX = XA$ を計算することで $a_{ij}$ たちの満たすべき条件をまず調べよ。

**問 3.6.** $A = (a_{ij})$ を $(m,n)$ 型行列、$B = (b_{ij})$ を $(n,r)$ 型行列とする。${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^tA$ との $(i,j)$ 成分をそれぞれ求め、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を示せ。

**問 3.7.** $n$ 次正方行列 $A, B$ に対して、$[A,B] = AB - BA$ とおく (これを $A,B$ の交換子積という)。

(1) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = O$ が成立することを示せ (これを Jacobi(ヤコビ) の恒等式という)。

(2) ${}^tA = -A$ となる行列を交代行列という。$A, B$ ともに交代行列であれば、$[A,B]$ も交代行列であることを示せ。

**問 3.8.** $A = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 1+5i & 2-3i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, とする。次を計算し比較せよ。

(1) ${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^tA$,　(2) ${}^t(\overline{B}\,{}^tA)$ と $A\,{}^t\overline{B}$

**問 3.9.** $A = \begin{pmatrix} i & 1-i & -i \\ 2 & i & 3 \\ 0 & 1+i & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ とする。次を求めよ。

(1) $A + {}^t\overline{A}$ と $A - {}^t\overline{A}$,　(2) $A\,{}^t\overline{A}$,　(3) ${}^t\overline{A}\,A$,　(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を満たす縦ベクトル $\boldsymbol{x}$

**問 3.10.** $(m,n)$ 型行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して、$B = A\,{}^t\overline{A}$ とおく。$B$ の $(k,l)$ 成分を求め、${}^t\overline{B} = B$ が成立することを示せ。また、特に $B$ の対角成分が非負であることを確認せよ。

**問 3.11.** 数列 $\{b_n\}$ が $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq \cdots$ とするとき、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $\beta = \inf\{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ となることを確かめよ。ただし、$\{b_n\}$ が下に有界でないときは $\beta = -\infty$ と解釈する。(全く同様に、数列 $\{a_n\}$ を単調増加列とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ となることが示せる。)

**問 3.12.** 問 3.11 を用いて、次の問いに答えよ。

(1) $-2 \leqq p < 1 + \sqrt{3}$ とし、$a_1 = p$, $a_{n+1} = \sqrt{4 + 2a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。

(a) $a_n < 4$ を示せ。 (b) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。 (c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(2) $2 - \sqrt{3} < q < 2 + \sqrt{3}$ とし、$b_1 = q$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left({b_n}^2 + 1\right)$ によって定義される数列 $\{b_n\}$ を考える。

(a) $0 \leq b_n$ を示せ。 (b) $\{b_n\}$ が単調減少であることを示せ。 (c) $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

**問 3.13.** 次の漸化式によって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項と $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。(解き方は下を見よ。)

(1) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, (2) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$,

(3) $a_{n+2} = -2a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, (4) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$,

- 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の解き方: 特性方程式 $x^2 = px + q$ の根を $\alpha, \beta$ とすると、

$\alpha \neq \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ が、
$\alpha = \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1}$ が

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha + \beta = p$, $\alpha\beta = -q$ に注意すると、
$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ より

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ と変形でき、}\quad a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n \ \cdots \ (\mathrm{I})$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形でき、}\quad a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \ \cdots \ (\mathrm{II})$$

よって、$\alpha \neq \beta$ なら、(II) から (I) を引き、$\alpha - \beta$ で割ることで、$a_n = \dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta}\alpha^n - \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta}\beta^n$ を得る。

$\alpha = \beta$ のときは (I) と (II) は同じ式になってしまうが、$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を $\alpha^{n+1}$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} \quad \text{となり、} \quad \frac{a_n}{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k}\right) + \frac{a_0}{\alpha^0} = n\frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} + a_0.$$

よって、$a_n = (a_1 - \alpha a_0)n\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$ となることが従う。
注意: ここでは $a_1, a_0$ の値を与えて解いているが、問 3.13 では $a_2, a_1$ の値を与えていることに注意せよ。

- 漸化式 $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3 = px^2 + qx + r$ の根を $\alpha, \beta, \gamma$ とすると、

$\alpha, \beta, \gamma$ がすべて異なるとき、 $a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n$,
$\alpha = \beta \neq \gamma$ (一組のみ重根) のとき、 $a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3\gamma^n$,
$\alpha = \beta = \gamma$ (3 重根) のとき、 $a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3 n(n-1)\alpha^{n-2}$

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、$b_n = a_{n-1}$, $c_n = a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n + rc_n \\ b_{n+1} = \ \ a_n \\ c_{n+1} = \ \ b_n \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 $A$ と縦ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に関する漸化式 $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、$\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ となり、行列の $n$ 乗に関する問題となる。行列の $n$ 乗についての一般的な計算法は、$\alpha, \beta, \gamma$ がすべて異なる (対角化可能な場合) とき線型代数学の教科書第 5 章で、一般の場合は教科書第 6 章で学ぶ。
注意: 上記のような単独の漸化式の一般項を求めるためには、$A^n$ そのものを求めるのは避け、$A^n$ に関する結果を利用できることのみを使って、上記のように表せるとして解けばよい。