基礎ゼミ I　問題 2　　　2018 年 4 月 16 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

公理 (アルキメデスの公理)**.** 任意の正の実数 a と任意の実数 b に対して、ある $n \in \mathbf{N}$ が存在して、$an > b$ とできる。

問 2.1 (有理数の稠密性)**.** 任意の異なる二つの実数 a, b $(a < b)$ の間には有理数 r $(a < r < b)$ が存在する。アルキメデスの公理を用いて、これを証明せよ。

定義 (ε-δ 論法 1)**.** 数列 $\{a_n\}$ が、n を大きくしたときに数 α に収束するとは, 任意の正の実数 ε に対して、ある (ε から定まる) 自然数 N が存在して、$n \geqq N$ となるすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立することと定義する。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表す。

定義 (ε-δ 論法 2)**.** 任意の実数 M に対して、ある (M から定まる) 自然数 N が存在して, $n \geqq N$ となるすべての自然数 n に対して、$a_n > M$ となるとき, $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するという。このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表す。

問 2.2. アルキメデスの公理を用いて、次が成立することを ε-δ 論法で確かめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

問 2.3. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ とする。自然数 M に対して $n \geq N$ ならば $a_n > M$ となる N を M を用いて具体的に表し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を確認せよ。(ヒント: 例えば $N = 2^{2(M-1)}$.)

問 2.4. $a_n = (-1)^{n-1}$ とする。ε-δ 論法を用いて、数列 $\{a_n\}$ が発散する (収束しない) ことを確かめよ。

問 2.5. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の定義を書け。

ε-δ 論法を用いて、以下の問い (問 2.6 – 問 2.13) に答えよ。

問 2.6. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, なら $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ を示せ。

注意　問 2.6 は「$\{a_n\}$ は α に収束し $\{b_n\}$ は β に収束するならば、$\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを示せ。」と問うている。以下も同様に解釈せよ。

問 2.7. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。(ヒント：$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ をまず示せ。)

問 2.8. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする。$\alpha > 0$ なら、ある N が存在して、$n \geqq N$ となるすべての n について $a_n > \frac{\alpha}{2}$ が成立することを示せ。

問 2.9. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\alpha \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ を示せ。(ヒント：問 2.7, 問 2.8 を用いる。)

問 2.10. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ を示せ。また、逆は成立するか? 成立するなら証明し、成立しないなら反例を挙げよ。

問 2.11. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ を証明せよ。

問 2.12. 自然数の増加列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ に対して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ を示せ。
(このような数列 $\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という。)

問 2.13 (はさみうちの原理)**.** (1) 各自然数 n について、$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ が成立し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ なら、$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ となることを示せ。
(2) 各自然数 n について、$a_n \leqq c_n$ が成立し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ なら、$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ となることを示せ。

(裏面もあります)

問 2.14. (3), (4) では $c>1$, (5) では $0<a<b<c$ とする。はさみうちの原理を用いて次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n!}$　(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n^2}$　(5) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$

問 2.15. 一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ。ただし、$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ は既知とする。

(1) (a) $\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　(b) $\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}$　(c) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2) (a) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　(b) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$　(3) $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$　(4) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

ヒント: (1) (b) 加法定理を用いよ, (c) まず $\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ を計算せよ,

(3), (4) $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\geq\sqrt{n}$, $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}<3$ を示し、はさみうちの原理を用いよ。

以上