基礎ゼミ I　3 組, 4 組　問題 1　　　2018 年 4 月 9 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 1.1. 平面ベクトル $\boldsymbol{u} = (a, b),\ \boldsymbol{v} = (c, d)$ に対して、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき、$ac + bd = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ が成立することを示せ. (ヒント: 余弦定理を用いよ。)

問 1.2. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、$\dfrac{2(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})},\ \dfrac{2(\vec{b}, \vec{a})}{(\vec{a}, \vec{a})}$ がともに整数のとき、$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を求めよ。

問 1.3. 次の確率 p_n を求めよ。(ヒント: まず、p_{n+1} を p_n の式で表せ。)

(1) 1 個のサイコロを投げて 3 以上の目が出たら 5 点、2 以下の目が出たら 2 点得られるゲームを行う。サイコロを n 回投げて。合計点が偶数になる確率 p_n を求めよ。

(2) 袋 A に赤球 1 個、袋 B に白球 4 個入っている。一回の試行で、袋 A の球 1 個を袋 B からランダムに取り出した球 1 個と交換する。n 回の試行の後、袋 A に赤球が入っている確率 p_n を求めよ。

問 1.4 (de Moivre の定理)**.** (1) 複素数 $\alpha = a + ib$ に対して、$e^{\alpha} = e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i\sin b)$ と定める。三角関数の加法定理を用いて複素数 α, β に対して、$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$ を示せ。(ヒント: $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ と表し、$e^{a+c}(\cos(b + d) + i\sin(b + d)) = e^{a}(\cos b + i\sin b)\, e^{c}(\cos d + i\sin d)$ を示せばよい。)

(2) (1) より、$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, 即ち、$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),\ n \in \boldsymbol{Z}$, を得る。これを用いて (a) $(1 + \sqrt{3}i)^8$, (b) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ の値を求めよ。

問 1.5. 次の方程式の根を求め、それらを表す点を複素平面上に図示せよ。

(a) $x^4 = -1$,　　(b) $x^3 = 8i$,　　(注意: 三角関数を用いた表示はダメ。)

問 1.6. $x^5 = 1$ を解くことにより、$\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

問 1.7. 1 辺の長さが 2 の正方形 ABCD において、辺 AD の中点を E とする。辺 AB 上に点 P をとり、線分 AP の長さを x とおく。

(a) x を用いて $\tan\angle\mathrm{EPA}$ と $\tan\angle\mathrm{CPB}$ を表せ。

(b) x を用いて $\tan\angle\mathrm{EPC}$ を表せ。ヒント: (a) と三角関数の加法定理を用いよ。

(c) 点 P が辺 AB 上を動くとき、$\tan\angle\mathrm{EPC}$ の最大値、最小値とそのときの x の値を求めよ。

問 1.8. 複素数 z について、$z + \dfrac{3}{z}$ は実数で、$3 \leqq z + \dfrac{3}{z} \leqq 4$ を満たす z の範囲を、以下に従って複素数平面上に図示せよ。ただし、$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ は r の式、$\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ は数値で答えよ。

(a) z が負の実数のとき、$3 \leqq z + \dfrac{3}{z} \leqq 4$ を満たさないことを確認せよ。

(b) (a) より $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ $(r > 0, -\pi < \theta < \pi)$ とでき、$z + \dfrac{3}{z} = (\boxed{ア})\cos\theta + i\,(\boxed{イ})\sin\theta$ と表せる。

(c) $z + \dfrac{3}{z}$ は実数であるから、$(\boxed{イ})\sin\theta = 0$ となる。よって、$r = \boxed{ウ}$ または $\theta = \boxed{エ}$ となる。

(d) $r = \boxed{ウ}$ のとき θ の範囲を、$\theta = \boxed{エ}$ のとき r の範囲を、$3 \leqq z + \dfrac{3}{z}(= (\boxed{ア})\cos\theta) \leqq 4$ を満たすように定め、複素数平面上に図示せよ。

問 1.9. 複素数 z について、$|z| = 1$ のとき、$w = \dfrac{z}{2} + 2\overline{z}$ が複素数平面上に描く軌跡を次のように求めよ。

(a) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とするとき、$w = \dfrac{z}{2} + 2\overline{z}$ の実部 x, 虚部 y を θ の式を用いて表し、そこから θ を消去し、x と y の満たす方程式を導け。

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とするとき、$\left|\dfrac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right|$ を $\cos\theta$ の式で表せ。また、$\left|\dfrac{z}{2} + 2\overline{z} + 2\right|$ を $\cos\theta$ の式で表せ。

(c) $\left|\dfrac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right| + \left|\dfrac{z}{2} + 2\overline{z} + 2\right| = 5$ を示し、複素数平面上での w の軌跡が実軸上の二つの点 2 と -2 を焦点とする楕円であることを確かめよ。

問 1.10. $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$a_n = n^2 + n + 1$ とおき。さらに、実数 x_n, y_n を

$$(a_1 + i)(a_2 + i)\cdots(a_n + i) = x_n + y_n i, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

によって定める。このとき、$\dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{n}{n+2},\ n = 1, 2, \ldots,$ が成り立つことを示せ。