

問 13.1. 次の行列式を計算せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 + bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3 + acd \\ 1 & c & c^2 & c^3 + abd \\ 1 & d & d^2 & d^3 + abc \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$(7) D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$(8) D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

問 13.2. 次の行列の逆行列をその行列式と余因子行列を計算することで求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ -1 & 1 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問 13.3. 次の1次方程式系をクラメルの公式を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} 2x + y + 4z = -1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + y + 2z = 5 \\ x - 4y - 2z = 7 \\ -x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ 9x + 4y + 16z = 25 \end{cases}$$

問 13.4. 次の広義定積分を求めよ ( $a > 0$ )。

$$(1) \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3) \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$(5) \int_0^1 \log x dx$$

$$(6) \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$(7) \int_1^\infty \frac{x+1}{x(1+x^2)} dx$$

$$(8) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$(9) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

$$(10) \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$(11) \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$(12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$$

$$(13) \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - \cos x} dx$$

$$(14) \int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx$$

$$(15) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2 + 6x + 3}$$

$$(16) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}}$$

$$(17) \int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$(18) \int_{-\infty}^0 e^{3x} \sqrt{1 - e^{3x}} dx$$

$$(19) \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(20) \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$