基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 12　　　2017 年 7 月 3 日

問 12.1. $2 < e < 3$ を知っているとして、e^x に Maclaurin の定理を用いることにより、e が無理数であることを示せ。

問 12.2. 関数 $f(x)$ が区間 I で 2 回微分可能であるとする。このとき、すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \geq 0$ ならば、すべて $c \in I$ において、$y = f(x)$ のグラフはその点 $(c, f(c))$ における接線より下にはないこと、すなわち、$f(x) \geq f'(c)(x-c) + f(c)$, $x \in I$, であることを示せ。

問 12.3. 定積分の定義に従って、$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を計算せよ ($cf.$ 微積の教科書 p.77)。

問 12.4. $[0,1]$ 上 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$ で定義される関数は、(Riemann) 可積分でないことを示せ。[*1]

問 12.5. $p(x)$ を n 次多項式とするとき $\displaystyle\int p(x)e^{-x}\,dx = -\{p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x)\}e^{-x}$ であることを示せ。

問 12.6. 次の関数の原始関数を求めよ。

(1) $\dfrac{x^4}{x^2-3x+2}$　(2) $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$　(3) $\dfrac{x}{(2x+1)(3x^2+1)}$

(4) $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$　(5) $\dfrac{1}{x^6-1}$　(6) $\dfrac{1}{x^4+1}$

(7) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}$　(8) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$　(9) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

(10) $\dfrac{x}{\sqrt{2-x-x^2}}$　(11) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$　(12) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

(13) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$　(14) $\dfrac{4}{3x^2-6}$　(15) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

(16) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$　(17) $\dfrac{1}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$　(18) $\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+5\tan^2 x}}$

(19) $\cos^{-1} x$　(20) $x^2\sin^{-1} x$　(21) $x\tan^{-1} x$

(22) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\cdot\sin^{-1} x$　(23) $\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}$　(24) $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

問 12.7. 次の定積分を求めよ ($a > b > 0$)。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1} x\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^a \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx$　(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$　(11) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^3}$　(12) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x(4-x)}\,dx$

問 12.8. $f(x) = \displaystyle\int_a^x (x-t)g(t)\,dt$ とおくと、$f''(x) = g(x)$ であることを示せ。

問 12.9. 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ b & b & x & b \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

[*1] 3 年次で学ぶ Lebesgue(ルベーグ) 積分では、積分ができて値は 0 になる。