基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 11　　2017 年 6 月 26 日

問 11.1. $f(x)$ を区間 (a,b) 上の関数とし、$a<c<b$ となる点 $x=c$ で $f(x)$ は微分可能であるとする。$f(x)$ が $x=c$ で極値をとれば $f'(c)=0$ となることを示せ。

問 11.2. $f(x)$ が n 回微分可能とするとき、$\left\{x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ となることを示せ。

問 11.3. $f(x)=\tan^{-1}x$ について、$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0,\ n\geq 2,$ を示し、$f^{(2k)}(0)=0,\ f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k(2k)!\ (k\geq 1)$ となることを示せ。

$n\in\mathbf{N}$ に対して、Legendre(ルジャンドル) の多項式 $P_n(x)$, Hermite(エルミート) の多項式 $H_n(x)$, Laguerre(ラゲール) の多項式 $L_n^{\alpha}(x),\ (\alpha>-1)$ をそれぞれ次の式で定義する。[*1]

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\qquad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\qquad L_n^{\alpha}(x)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}).$$

問 11.4. $P_n(x)$ は n 次多項式であること、及び、$(x^2-1)P_n(x)''+2xP_n(x)'-n(n+1)P_n(x)=0$ を示せ。

問 11.5. $P_n(x)=0$ は $(-1,1)$ において相異なる n 個の根をもつことを示せ。

問 11.6. $H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$ を示し、$H_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ。

問 11.7. $H_n(x)'=2nH_{n-1}(x)$ を示し、$H_n(x)''-2xH_n(x)'+2nH_n(x)=0$ を示せ。

問 11.8. $L_n^{\alpha}(x)$ は n 次の多項式となることを示せ。

問 11.9. $xL_n^{\alpha}(x)''+(\alpha+1-x)L_n^{\alpha}(x)'+nL_n^{\alpha}(x)=0$ を示せ。

問 11.10. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\\ 0 & x\leqq 0\end{cases}$ とする. [*2]

(1) $x>0$ で $f^{(n)}(x)=\frac{p_{n-1}(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$ で, $p_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の多項式になることを示せ。
(2) 上の結果を用いて、$f^{(n)}(x)=0$ および $\lim_{x\to+0}f^{(n)}(x)=0$ を示せ。

問 11.11. $f(x)$ が点 (a,b) で C^2-関数であって、$c\in(a,b)$ とするとき、$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-2f(c)+f(c-h)}{h^2}=f''(c)$ を示せ。

問 11.12. $f(x)$ が 2 回微分可能で平均値の定理 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta_h h)\ (0<\theta_h<1)$ に対し、$f''(x)$ が $x=a$ で連続で $f''(a)\neq 0$ であるとき、$\lim_{h\to 0}\theta_h$ を求めよ。

問 11.13 (Newton の一般化された二項定理)**.** α を実数とする。$f(x)=(1+x)^{\alpha}$ に Maclaurin の定理を適用し、

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k+R_n(x)$$

を導け。ただし剰余項 $R_n(x)$ は Lagrange の剰余項、Cauchy の剰余項の 2 通りを述べよ。ここで、$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ k=0,1,2,\ldots,\ \alpha\in\mathbf{R}$ と定める。

[*1] 文献によっては、これらの定義は定数倍違っていることがある。

[*2] この問題の結果から、$f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$ は、帰納的に $f^{(n)}(0)=0,\ (n=0,1,2,\ldots)$ とおくことにより、全ての階数の導関数が連続になる。また、この関数の Maclaurin 展開式は $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots=0$ となり、原点以外では、元の関数と一致しない。自然に現れる関数の Maclaurin 級数は, 通常は収束半径内ではもとの関数に一致するが、このようにそうではない関数も人工的に作ることができる。なぜ、このようなことになるのかは、3 年次で勉強する複素関数論 (解析学 I, II) で明らかになる。また、この問題の形の関数を利用して, 「1 の分解」というものが作られ、幾何学 (多様体論) をはじめ様々に応用される.