

基礎ゼミ I 7組, 8組 問題 10 2017年6月19日

行列 A の行列式、 $\det A = |A|$ と両方の記号を使うことにする。 $|\det A|$ は A の行列式の値の絶対値を表す。

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 10.1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i = 1, 2$, に対して、 $\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と定め、 xy -平面上の 3 点 $O(0, 0), P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ を頂点とする三角形の面積を S 、3 点 $O(0, 0), P'(x'_1, y'_1), Q'(x'_2, y'_2)$ を頂点とする三角形の面積を S' とする。 $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ および $S' = |ad - bc|S (= |\det A|S)$ が成立ことを示せ。

問 10.2. 3次元実ベクトル $\mathbf{x} = (a, b, c), \mathbf{y} = (d, e, f)$ は一次独立、すなわち、 $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ または $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$ となる $\lambda \in \mathbf{R}$ は存在しないとする。このとき、 \mathbf{x} と \mathbf{y} の外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ を

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = (bf - ce, -af + cd, ae - bd)$$

と定義する。次を示せ。

(1) $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は \mathbf{x} と \mathbf{y} の双方に直交し、 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ の長さ $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|$ は \mathbf{x} と \mathbf{y} のなす平行四辺形の面積に等しい。

(2) 3つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ はこの順序で右手系をなす、即ち、 $\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ bf - ce & cd - af & ae - bd \end{vmatrix}$ が正となる。(ヒント: サラスの方法でこの行列式を計算し、それが $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2$ に等しいことを示せ。)

問 10.3. 次の 6 次の行列式 $\det[a_{ij}]$ において、次の項につける符号は何か。

(a) $a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$ (b) $a_{12}a_{24}a_{36}a_{41}a_{53}a_{65}$ (c) $a_{13}a_{26}a_{32}a_{45}a_{51}a_{64}$

問 10.4. $\operatorname{sgn}(n \ n - 1 \ \dots \ 2 \ 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ であることを示せ。

問 10.5. $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列のうち、偶順列及び奇順列の個数は等しく共に $\frac{n!}{2}$ 個ずつあることを示せ。

問 10.6. 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$

問 10.7. 次の極限值を求めよ。ただし、l'Hopital の定理を用いるときは、不定形であることを明記せよ。 $(a > 0$ は定数。)

(1) (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-a} e^{-\frac{1}{x}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\tan \frac{\pi}{2} x}$
 (2) (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{ax - (\log x)^2\}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cot x}$
 (3) (a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \frac{\log(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-(\log x)^2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$
 (4) (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x \right)$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)^{\frac{1}{x}}$

問 10.8. 次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $\frac{1}{2x+1}$ (2) $\sin^3 x$ (3) $x^3 e^{2x}$ (4) $e^x \cos x$ (5) $x^2 \sin 3x$ (6) $x^{n-1} \log x$