基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 9　　　2017 年 6 月 12 日

問 9.1. 次 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ に対する連立方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、A の逆行列 A^{-1} を求めて、連立方程式を解け ($cf.$ 線形代数の演習書 p.35)。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ 6 & 8 & -9 & -12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

問 9.2. 次の同次連立 1 次方程式系が非自明な解をもつように定数 a の値を定め、一組の基本解を求めよ ($cf.$ 線形代数の演習書 p.37)。

$$(1) \begin{cases} -x + 2y + az = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \\ 3x - ay + 2z = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x + y + az = 0 \\ 4x + ay + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ ax + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

問 9.3. 次の 1 次方程式系を掃き出し法を用いて解け。a, b は定数とする。
注意: a, b の値によっては非自明な解をもつこともあるので、場合分けして、一般解があればそれを特殊解と同伴な同次連立一次方程式の一次結合の和で表せ。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 5z = 2a - 1 \\ 3x + ay + 8z = 2a + 4 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 9y + 7z = 3 \\ ay + 2z = b \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

問 9.4. 行列 A が (l, m) 型、B が (m, n) 型のとき、$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}\, A$ を示せ ($cf.$ 線型代数の教科書 p.71, **8**)。

問 9.5. 両辺の導関数が一致することを示し、(平均値の定理を用いて) 次を示せ。

(1) $\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x > 0)$　　(2) $\sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x \in \mathbf{R})$

(3) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\sin^{-1} x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

問 9.6. 次の不等式を示せ。

(1) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(2) $x < \sin^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}x \quad (0 < x < 1)$

(3) $x - \dfrac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x \quad (x > 0)$　　(4) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad (a < b)$

(5) $0 < a < b < 1$ のとき、$p > q > 0$ ならば $\dfrac{b^p - a^p}{b^q - a^q} < \dfrac{p}{q}$.

問 9.7. $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、$\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0\ (x \geq 0)$ を示せ。また、これより $a > 0, b > 0$ ならば $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ となることを示せ。

問 9.8. $f(x) = x^{1/x}\ (x > 0)$ の増減を調べることにより、$m > n > e$ ならば、$m^n < n^m$ となることを示せ。

問 9.9. $f(x)$ が (a, ∞) で微分可能で、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$ であるとき、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x+1) - f(x)\} = l$ であることを示せ。