基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 8　　　**2017 年 6 月 5 日**

問 8.1. 次の行列が基本変形を用いて正則か否かを調べ、正則ならば逆行列を求めよ。また、(1)–(4) はそこで用いた左基本変形を表す行列 (cf. 教科書 pp.46–47) を述べ、逆行列をその基本行列の積で表せ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ 6 & 8 & -9 & -12 \end{pmatrix}$

問 8.2. 次の連立一次方程式を解け。(一般解があればそれを特殊解と同伴な同次連立一次方程式の一次結合の和で表せ。)

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$　(7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = -3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases}$　(9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$　(10) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

問 8.3. 次の関数の $f'(0),\ f'_+(0),\ f'_-(0)$ があれば求めよ。

(1) $f(x) = \sin|x|$　(2) $f(x) = |x| - \tan|x|$　(3) $f(x) = a^x - b^x\ (a, b > 0)$

(4) $f(x) = \begin{cases} x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$　(5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$　(6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & (x \neq 0) \\ 1, & (x = 0) \end{cases}$

問 8.4. 関数 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$ について、$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ。また、$f'(x)$ が $x = 0$ で連続ではないことを確かめよ。

問 8.5. 次を示せ。$(a > 0.)$

(1) 曲線 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ (0 \le t \le \pi/2)$ の各点での接線が両軸によって切り取られる部分の長さは一定である。

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 上の点での接線が x 軸, y 軸と交わる点を P, Q と原点 O との距離の和 $\mathrm{OP} + \mathrm{OQ}$ は一定である。