基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 6　　　2017 年 5 月 29 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 6.1. 数学的帰納法を用いて次を示せ。ヒント: ${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

(1) 行列 A, B が可換であるとき、$(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k A^k B^{n-k}$.

(2) (Leibniz の公式)　$f(x), g(x)$ が n 回微分可能なとき、$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

問 6.2. n 次正方行列 A に対して、$AY = E$ となる n 次正方行列 Y が存在すれば、A は正則であり $YA = E$ となることを、n に関する数学的帰納法を用いて示せ。

問 6.3. 正方行列 A が、ある $k \in \mathbf{N}$ に対して $A^k = O$ であるとき、$(E+A)^{-1}$ を求めよ。

問 6.4. (m, n) 型行列 A と (n, m) 型行列 B に対し、$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ を示せ。(Tr の定義は教科書 p.43.)

問 6.5. 次の式を証明せよ。($\sin^{-1} x$ などは、$\arcsin x$ とも書かれる。どちらの記号を使っても良い。)

(1) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$　　(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$

(3) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & (x > 0) \\ -\dfrac{\pi}{2}, & (x < 0) \end{cases}$　　(4) $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \cos^{-1} x, & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \pi - \cos^{-1} x, & (-1 \leqq x \leqq 0) \end{cases}$

(5) $\tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　　(6) $2\tan^{-1} \dfrac{1}{3} + \tan^{-1} \dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$　　(7) $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 5 + \tan^{-1} 8 = \dfrac{5}{4}\pi$

問 6.6. 双曲線関数 (微積の教科書 p.35) について、次を示せ。

(1) (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,　(b) $(\sinh x)' = \cosh x$,　(c) $(\cosh x)' = \sinh x$,　(d) $(\tanh x)' = \dfrac{1}{(\cosh x)^2}$

(2) (a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,　(b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

(3) (a) $(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,　(b) $(\tanh^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$,　　(4) $(\mathrm{sech}^{-1} x)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$　$(0 < x \leqq 1)$

問 6.7. 次の関数を微分せよ。ただし、$a, b > 0$ は定数とする。

(1)　(a) $x\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$　　(b) $\sin^{-1} \dfrac{x}{a}$　　(c) $\cos^{-1}(\sin x)$　　(d) $\log\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

(2)　(a) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$　　(b) $\sin^{-1}(\cos x)$　　(c) $\tan^{-1} \dfrac{1}{x}$　　(d) $\log(x + \sqrt{x^2+a^2})$

(3)　(a) x^x　　(b) $\tan^{-1} \dfrac{x}{a}$　　(c) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$　　(d) $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}$

(4)　(a) $\cos^{-1} \dfrac{x}{a}$　　(b) $\tan^{-1} \dfrac{1+x}{1-x}$　　(c) $\dfrac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\log(1-x^2)$

(5)　(a) $(a^x + b^x)^{1/x}$　　(b) $\tan^{-1} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$　　(c) $\sinh^{-1}(\cosh x)$

問 6.8. 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算せよ ($a, b > 0$ は定数)。ヒント: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}$

(1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = a\sinh t \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$