基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 7　　　2017 年 5 月 22 日

例題. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0\,,\,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1)$ を示せ。[*1]

解: "$\subset$" について: $x\in\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ とすると、ある $n=1,2,\ldots$ があって $x\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$.
このとき、$0\leq x\leq 1-\dfrac{1}{n}$ であるから、$0\leq x<1$ となり $x\in[0,1)$. 即ち、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\subset[0,1)$.
"$\supset$" について: $x\in[0,1)$ とする。このとき、$n=\left[\dfrac{1}{1-x}\right]+1$ とすると $n>\dfrac{1}{1-x}$ より $0\leq x<1-\dfrac{1}{n}$ となる[*2]。従って、$x\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$, 特に $x\in\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ となるから、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\supset[0,1)$ を得る。
以上より、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0\,,\,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1)$ となる。　$\square$

問 7.1. 次が成り立つことを示せ。
(1) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\,,\,1\right)=(0,1)$　(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\,,\,1\right)=(0,1)$　(3) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}\,,\,1\right]=[0,1]$　(4) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\,,\,1\right]=[0,1]$

問 7.2. 次が成り立つことを示せ。$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す。
(1) $\{\,2m+3n\,;\,m,n\in\mathbf{Z}\,\}=\mathbf{Z}$,　　(2) $\left\{\,\dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{3}\,;\,m,n\in\mathbf{Z}\,\right\}=\left\{\,\dfrac{m}{6}\,;\,m\in\mathbf{Z}\,\right\}$,

問 7.3. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ を求めよ。

問 7.4. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ と可換な 2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ を求めよ。また、2 次正方行列 X,Y がともに A と可換であれば、X と Y は可換となることを確認せよ。

問 7.5. 次の条件を満たす 2 次正方行列 A をすべて決定せよ。
(1) $A^2=A$　　(2) $A^2+E=0$

問 7.6. 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して、Cayley-Hamilton の公式 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ を示せ。E は単位行列、O は零行列を表す。

問 7.7. 次を求めよ。(ヒント: Cayley-Hamilton の公式と問 7.8 の計算法を用いよ。)
(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ のとき A^7,　(2) $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ のとき B^7,　(3) $C=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$ のとき $C^n, n\in\mathbf{N}$.

問 7.8. $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&-2&6\\2&5&-3\\-2&-1&7\end{pmatrix}$ とする。
(1) $A^3-3A^2+3A=O$ を示し、A^8 を A^3-3A^2+3A で割りその余りを計算することで、A^8 を求めよ。
(2) $B^3-2B^2+2B-E=O$ を示し、$B^{10}-B^9+B^8$ を求めよ。
(3) 自然数 n に対して $(C-4E)^n$ を計算し、C^n を求めよ。(ヒント: $C-4E$ と $4E$ は可換なので二項定理より $C^n=\{(C-4E)+4E\}^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(C-4E)^k(4E)^{n-k}$ となることを用いよ。)

[*1] **定義** $A,B,\,A_n,\,n=1,2,\ldots,$ を集合とするとき、次のように定義する。
1) $A\subset B \overset{\text{def}}{\iff}$「$x\in A\Rightarrow x\in B$」　2) $A=B \overset{\text{def}}{\iff}$「$A\subset B$ かつ $A\supset B$」
3) $x\in\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \overset{\text{def}}{\iff}$「ある $n=1,2,\ldots$ があって $x\in A_n$」　4) $x\in\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n \overset{\text{def}}{\iff}$「任意の $n=1,2,\ldots$ に対して $x\in A_n$」

[*2] いうまでもなく、実際は、$x<1-\dfrac{1}{n}$ とするためには、$n>\dfrac{1}{1-x}$ であればよいから、$n=\left[\dfrac{1}{1-x}\right]+1$ と定めた。