基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 5　　　2017 年 5 月 8 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

定義 (ε-δ 論法 1)**.** x が α に近づくとき (ただし $x \neq a$)、関数 $f(x)$ が実数 a に収束するとは、任意の正数 ε に対してある (ε から定まる) 正数 δ が存在して、$0 < |x-\alpha| < \delta \implies |f(x)-a| < \varepsilon$ が成立することと定義する。このとき $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$, あるいは $f(x) \to a$ $(x \to \alpha)$ と表す。

$f(x)$ が収束しないとき、$f(x)$ は発散するという。

定義 (ε-δ 論法 2)**.** x が α に近づくとき (ただし $x \neq a$)、関数 $f(x)$ が ∞ に発散するとは、任意の正数 K に対してある (ε から定まる) 正数 δ が存在して、$0 < |x-\alpha| < \delta \implies f(x) > K$ が成立することと定義する。このとき $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, あるいは $f(x) \to \infty$ $(x \to \alpha)$ と表す。

問 5.1. (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問 5.2. (a) $\lim_{x\to\alpha+0} f(x)(=\lim_{x\downarrow\alpha} f(x)) = a$, (b) $\lim_{x\to\alpha-0} f(x)(=\lim_{x\uparrow\alpha} f(x)) = \infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問 5.3. $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$ の必要十分条件は $x_n \to \alpha$ $(n\to\infty)$, $x_n \neq \alpha$ $(n = 1, 2, \ldots)$ なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ であることを示せ。

問 5.4. $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = b$ とする。ε-δ 論法を用いて (問 5.3 を用いずに) 次を示せ。

(1) (a) $\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = |a|$,　　(b) $\lim_{x\to\alpha}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,

(2) $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = ab$,　　(3) $b \neq 0$ のとき $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{b}$,　　(4) $f(x) \leqq g(x)$ のとき $a \leqq b$

注意: 問 5.3 を用いると、教科書第 1 章の数列に関する定理 1–5 から上記が成立することが直ちに従う。

問 5.5. 次の極限値を求めよ。ただし、$\lim_{t\to0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t} = e$ は既知とする。

(1)　(a) $\lim_{x\to2-0} \dfrac{2x^2-3x-2}{|x^2-x-2|}$　　(b) $\lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$　　(c) $\lim_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}$　　(d) $\lim_{x\to1} x^{\frac{2}{1-x}}$

(2)　(a) $\lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(b) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin(\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}$　　(c) $\lim_{h\to0} \dfrac{\sin(x+h)+\sin(x-h)-2\sin x}{h^2}$

(3)　(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$　　(b) $\lim_{x\to1} \dfrac{\tan(x^2-1)}{\sin(x-1)}$　　(c) $\lim_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$

問 5.6. 中間値の定理を用いて、以下を示せ。

(1)　$f(x)$ が $[-1, 1]$ で連続であって $f(1) = f(-1) = 0$ ならば、原点を通る直線は $y = f(x)$ のグラフと交わる。

(2)　閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、$f(a), f(b) \in [a, b]$ ををみたせば、$f(c) = c$ となる $c \in [a, b]$ が存在する。

(3)　区間 I 上の 1 対 1 連続関数は狭義単調である。

問 5.7. (1) $\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x)$ が $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとする。$f(x)$ が $x = 0$ で連続なら、全ての点で連続であることを示せ。

(2) $\mathbf{R}$ で定義された連続関数 $f(x)$ が $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとすると, 定数 a が存在して, $f(x) = ax$ となることを示せ。(注意: 一般には、$f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たしても $f(x) = ax$ とならない例が知られている。)

問 5.8. 次の行列 A の階数を求めよ。a は定数とする。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a-3 \\ 1 & 1 & a+1 & -2 \\ 1 & a+2 & 1 & -3 \\ a+1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \\ a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$