基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 4　　　2017 年 5 月 1 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 4.1. (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば数列 $\{a_n\}$ は有界である、すなわち、ある $K \in \mathbf{R}$ が存在して $\forall n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|a_n| \le K$ とできることを示せ。

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を示せ。

問 4.2. $\{a_n\}$ が収束するとき、$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ を示せ。また、逆は成立するか? 成立するなら証明し、成立しないなら反例を挙げよ。

問 4.3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ であることを示せ。また、逆は成立するか? 成立するなら証明し、成立しないなら反例を挙げよ。

問 4.4. (1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c$ が存在して $c < 1$ ならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ について、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$ が存在して $c > 1$ ならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ。

問 4.5. 数列 $\{a_n\}$ について、ある実数 $0 < L < 1$ があって、すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|a_{n+2} - a_{n+1}| \le L|a_{n+1} - a_n|$ が成立すると仮定する。このとき、$\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ。

問 4.6. 問 4.5 を用いて次で定義される数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し、その極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 2}$, $a_1 = p > 0$,

(2) $a_{n+2} = (1-c)a_{n+1} + ca_n$, $a_1 = p$, $a_2 = q$, ただし、c, p, q は実数で、c は $0 < |c| < 1$ を満たす。

　　ヒント: $a_{n+2} + ca_{n+1} = a_{n+1} + ca_n = \cdots = a_2 + ca_1$ で $n \to \infty$ とすれば極限値がわかる。

問 4.7. 次の漸化式によって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項と $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。(漸化式の解き方は裏面を見よ。)

(1) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$,　$a_1 = 1, a_2 = 1$,　(2) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,　$a_1 = 1, a_2 = 1$,

(3) $a_{n+2} = -2a_{n+1} + a_n$,　$a_1 = 1, a_2 = 1$,　(4) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$,　$a_1 = 1, a_2 = 1$,

問 4.8. $0 < a_1 < b_1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ とする。このとき、$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列、$\{b_n\}$ は下に有界な単調減少列であることを示し (したがって $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに収束する)、さらに $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となることを示せ。

問 4.9. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad - bc \neq 0)$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(abc \neq 0)$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

問 4.10. 次の行列の階数 (rank) を掃き出し法で計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 13 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の解き方: 特性方程式 $x^2 = px + q$ の根を α, β とすると、

  $\alpha \neq \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ が、
  $\alpha = \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1}$ が

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ に注意すると、
$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ より

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n \ \cdots\ \text{(I)}$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \ \cdots\ \text{(II)}$$

よって、$\alpha \neq \beta$ なら、(II) から (I) を引き、$\alpha - \beta$ で割ることで、$a_n = \dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta}\alpha^n - \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta}\beta^n$ を得る。

$\alpha = \beta$ のときは (I) と (II) は同じ式になってしまうが、$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を α^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} \quad \text{となり、} \quad \frac{a_n}{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k}\right) + \frac{a_0}{\alpha^0} = n\frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} + a_0.$$

よって、$a_n = (a_1 - \alpha a_0)n\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$ となることが従う。
注意: ここでは a_1, a_0 の値を与えて解いているが、問 4.7 では a_2, a_1 の値を与えていることに注意せよ。

- 漸化式 $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3 = px^2 + qx + r$ の根を α, β, γ とすると、

  α, β, γ がすべて異なるとき、 $a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n$,
  $\alpha = \beta \neq \gamma$ (一組のみ重根) のとき、 $a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3\gamma^n$,
  $\alpha = \beta = \gamma$ (3 重根) のとき、 $a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3 n(n-1)\alpha^{n-2}$

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、$b_n = a_{n-1},\ c_n = a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n + rc_n \\ b_{n+1} = \ \ a_n \\ c_{n+1} = \ \ b_n \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 A と縦ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に関する漸化式 $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、$\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ となり、行列の n 乗に関する問題となる。行列の n 乗についての一般的な計算法は、α, β, γ がすべて異なる (対角化可能な場合) とき線型代数学の教科書第 5 章で、一般の場合は教科書第 6 章で学ぶ。
注意: 上記のような単独の漸化式の一般項を求めるためには、A^n そのものを求めるのは避け、A^n に関する結果を利用できることのみを使って、上記のように表せるとして解けばよい。