基礎ゼミ I 7 組, 8 組 問題 3 2017 年 4 月 24 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

記号. 行列 $A = (a_{ij})$ に対して A の転置行列を ${}^t\!A = (a_{ji})$ と、A の複素共役行列を $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ と表す。

問 3.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AB + AC$, $A(B + C)$ を計算し比較せよ。 (2) $C(3A) - (2B)A$ を計算せよ。 (3) $A\boldsymbol{y}$, $(\boldsymbol{z}B)\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

問 3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次を計算せよ。

(1) $AB - BA$, (2) $BC - CB$, (3) $A^2 - B^2$, (4) $(A + B)(A - B)$, (5) $ABC - AC$,
(6) $A + {}^t\!A$ と $A - {}^t\!A$, (7) $C\,{}^t C$

問 3.3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ。 (2) $AY = C$ を満たす行列 Y を求めよ。

問 3.4. $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくとき、(a) $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$, (b) ${}^t(A(\theta)) = A(-\theta)$ 示せ。

問 3.5. 任意の 3 次正方行列 X と可換な 3 次正方行列は $A = aE = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に限ることを証明せよ。

ヒント: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とし、$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合に、それぞれ $AX = XA$ を計算することで a_{ij} たちの満たすべき条件をまず調べよ。

問 3.6. $A = (a_{ij})$ を (m, n) 型行列、$B = (b_{ij})$ を (n, r) 型行列とする。${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^t\!A$ との (i, j) 成分をそれぞれ求め、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^t\!A$ を示せ。

問 3.7. n 次正方行列 A, B に対して、$[A, B] = AB - BA$ とおく (これを A, B の交換子積という)。

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ が成立することを示せ (これを Jacobi(ヤコビ) の恒等式という)。

(2) ${}^t\!A = -A$ となる行列を交代行列という。A, B ともに交代行列であれば、$[A, B]$ も交代行列であることを示せ。

問 3.8. $A = \begin{pmatrix} 1 - i & 3 + i \\ 1 + 5i & 2 - 3i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, とする。次を計算し比較せよ。

(1) ${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^t\!A$, (2) ${}^t(\overline{B}\,{}^t\!A)$ と $A\,{}^t\overline{B}$

問 3.9. $A = \begin{pmatrix} i & 1 - i & -i \\ 2 & i & 3 \\ 0 & 1 + i & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$ とする。次を求めよ。

(1) $A + {}^t\overline{A}$ と $A - {}^t\overline{A}$, (2) $A\,{}^t\overline{A}$, (3) ${}^t\overline{A}\,A$, (4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を満たす縦ベクトル $\boldsymbol{x}$

問 3.10. (m, n) 型行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して、$B = A\,{}^t\overline{A}$ とおく。B の (k, l) 成分を求め、${}^t\overline{B} = B$ が成立することを示せ。また、特に B の対角成分が非負であることを確認せよ。