**基礎ゼミ I　7 組, 8 組　問題 2　　　2017 年 4 月 17 日**
(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

**記号.** $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ は自然数の全体、$\mathbf{Z}$ は整数の全体、$\mathbf{Q}$ は有理数の全体、$\mathbf{R}$ は実数の全体、$\mathbf{C}$ は複素数の全体を表す。

**公理** (アルキメデスの原理)**.** 任意の正の実数 $a$ と任意の実数 $b$ に対して、ある $n \in \mathbf{N}$ が存在して、$an > b$ とできる。

**問 2.1** (有理数の稠密性)**.** 任意の異なる二つの実数 $a, b$ $(a < b)$ の間には有理数 $r$ $(a < r < b)$ が存在する。アルキメデスの原理を用いて、これを証明せよ。

**公理** (実数の連続性)**.** $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が上に有界であれば、$E$ の上界の最小値が存在する。それを $E$ の上限といい、$\sup E$ と表す。
$E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が下に有界であれば、$E$ の下界の最大値が存在する。それを $E$ の下限といい、$\inf E$ と表す。

**問 2.2.** 実数の連続性を用いて、
(1) $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が上に有界であるとき、$\sup E = \alpha$ となるためには
(i) $\forall x \in E$ に対して $x \leq \alpha$,　(ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $x \in E$ があって $x > \alpha - \varepsilon$ とできる
の 2 条件が成り立つことが必要十分であることを示せ。
(2) $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が下に有界であるとき、$\inf E = \beta$ となるためには
(i) $\forall x \in E$ に対して $x \geq \beta$,　(ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $x \in E$ があって $x < \beta + \varepsilon$ とできる
の 2 条件が成り立つことが必要十分であることを示せ。

**問 2.3.** 上に有界な集合 $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ に対し、その最大値 $\max E$ が存在し $\max E = \alpha$ であれば、$\sup E = \alpha$ となることを示せ[*1]。(全く同様に、下に有界な集合 $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ に対し、その最小値 $\min E$ が存在すれば、$\inf E = \min E$ となる。)

**例題 2.1.** $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, 0 < x \leq 2 \right\}$ のとき、その上限、最大値、下限、最小値を求めよ。

**解**: 上限、最大値について: $\forall x \in A$ に対して $x \leq 2$ であり、$2 \in A$ であるから、$\max A = 2$. よって、$\sup A = \max A = 2$ となる。
下限、最小値について: $\forall x \in A$ に対して $x \geq 0$ は明らか。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$0 < \min\{\varepsilon, 2\}$ であるから、有理数の稠密性によりある $x \in A$ があって $0 < x < \varepsilon$ とできる。従って、$\inf A = 0$ となる。一方、$0 \notin A$ より $\min A$ は存在しない。
以上により、$\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 0$, 最小値は存在しない。　□

**問 2.4.** 次の集合 $A$ に対し、その上限、最大値、下限、最小値を求めよ。ただし、$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1) $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, 0 \leq x < 2 \right\}$

(2) $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$

(3) $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, x^2 < 2x + 1 \right\}$

(4) $A = \left\{ x^2 - 2x \,\middle|\, x \in \mathbf{R}, 0 \leqq x < 3 \right\}$

(5) $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

(6) $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

**問 2.5.** $A \subset (0, \infty)$ は空でない上に有界な集合とし、$B = \left\{ \dfrac{1}{x} \,\middle|\, x \in A \right\}$ とおく。このとき、次を示せ。
(1) $B$ は下に有界で、$\inf B = \dfrac{1}{\sup A}$.　　(2) $\inf A > 0$ であれば、$B$ は上に有界で $\sup B = \dfrac{1}{\inf A}$.

**定義** ($\varepsilon$-$\delta$ 論法 1)**.** 数列 $\{a_n\}$ が、$n$ を大きくしたときに数 $\alpha$ に収束するとは, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して、ある ($\varepsilon$ から定まる) 自然数 $N$ が存在して、$n \geqq N$ となるすべての自然数 $n$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立することと

[*1] $\max E = \alpha$ であるための必要十分条件は $\forall x \in E$ に対して $x \leq \alpha$ でありかつ $\alpha \in E$ となることである。最小値の定義も同様。

定義する。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表す。

**定義** ($\varepsilon$-$\delta$ 論法 2)**.** 任意の実数 $M$ に対して、ある ($M$ から定まる) 自然数 $N$ が存在して, $n \geqq N$ となるすべての自然数 $n$ に対して、$a_n > M$ となるとき, $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するという。このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表す。

$\varepsilon$-$\delta$ 論法を用いて、以下の問い (問 2.6–問 2.14, 問 2.16) に答えよ。

**問 2.6.** $\varepsilon$-$\delta$ 論法およびアルキメデスの原理を用いて、次が成立することを確かめよ。
(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

**問 2.7.** $a_n = (-1)^{n-1}$ とする。$\varepsilon$-$\delta$ 論法を用いて、数列 $\{a_n\}$ が発散する (収束しない) ことを確かめよ。

**問 2.8.** $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の定義を書け.

**問 2.9.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする。$\alpha > 0$ なら、ある $N$ が存在して、$n \geqq N$ となるすべての $n$ について $a_n > \dfrac{\alpha}{2}$ が成立することを示せ.

**問 2.10.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ. (ヒント：$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ をまず示せ。)

**問 2.11.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\alpha \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\alpha}$ を示せ。

**問 2.12.** $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ を証明せよ。

**問 2.13.** 自然数の増加列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ に対して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ を示せ。

**問 2.14** (はさみうちの原理)**.** (1) すべての自然数 $n$ について、$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ が成立し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ なら、$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ となることを示せ。
(2) すべての自然数 $n$ について、$a_n \leqq c_n$ が成立し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ なら、$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ となることを示せ。

**問 2.15.** $0 < a < b < c$ を正の実数とする。はさみうちの原理を用いて、次の極限値を求めよ.
(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$　　(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!}$　　(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n^2}$ $(c > 1)$　　(5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$

**問 2.16.** 数列 $\{a_n\}$ を上に有界な単調増加列とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\alpha = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ となることを、$\varepsilon$-$\delta$ 論法と問 2.2 を用いて確かめよ。(全く同様に、数列 $\{b_n\}$ が下に有界な単調減少列とするとき、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $\beta = \inf\{b_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ となることが示せる。)

**問 2.17.** 問 2.16 を用いて (それぞれ (a), (b) より $\{a_n\}$ が収束することがわかる)、次の問いに答えよ。
(1) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4 + 2a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。
　(a) $2 \leqq a_n < 4$ を示せ。　(b) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。　(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。
(2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left({a_n}^2 + 1\right)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。
　(a) $0 \leq a_n \leq 3$ を示せ。　(b) $\{a_n\}$ が単調減少であることを示せ。　(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

**問 2.18.** 関数 $f(x)$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ について、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、$|x - \alpha| < \delta$ を満たすすべての実数 $x$ に対して $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ を満たす (すなわち $f(x)$ は $x = \alpha$ で連続である) と仮定する。このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であれば、$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ となることを $\varepsilon$-$\delta$ 論法を用いて確かめよ。

**問 2.19.** 一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ。ただし、$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ は既知とする。
(1) $\dfrac{\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3-n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$　(2) $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$　(3) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
(4) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　(5) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$　(6) $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$　(7) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
ヒント: (2) 加法定理, (3) $\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} =$???, (6), (7) まず $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq \sqrt{n}$, $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 3$ を示し、はさみうちの原理を用いよ。