**基礎ゼミ I 7 組, 8 組 問題 1　　2017 年 4 月 10 日**

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

**問 1.1.** 平面ベクトル $\boldsymbol{u} = (a, b),\ \boldsymbol{v} = (c, d)$ に対して、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を $\theta$ とするとき、$ac + bd = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ が成立することを示せ. (ヒント: 余弦定理を用いよ。)

**問 1.2.** ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、$\dfrac{2(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})}, \dfrac{2(\vec{b}, \vec{a})}{(\vec{a}, \vec{a})}$ がともに整数のとき、$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を求めよ。

**問 1.3.** $(1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \cdots + (1 + x)^n$ の展開式における $x^2$ の係数を求めよ。

**問 1.4.** (1) $(x + y + z)^n$ の展開式における $x^p y^q z^r (p + q + r = n,\ p, q, r \geqq 0)$ の係数を求めよ。

(2) $(x^2 + x + 1)^n$ の展開式における $x^4$ の係数を求めよ。

(3) $(x^2 + x + 1)^{10}$ の展開式における $x^6$ の係数を求めよ。

**問 1.5.** 次の確率 $p_n$ を求めよ。(ヒント: まず、$p_{n+1}$ を $p_n$ の式で表せ。)

(1) 1 個のサイコロを投げて 3 以上の目が出たら 5 点、2 以下の目が出たら 2 点得られるゲームを行う。サイコロを $n$ 回投げて。合計点が偶数になる確率 $p_n$ を求めよ。

(2) 袋 A に赤球 1 個、袋 B に白球 4 個入っている。一回の試行で、袋 A の球 1 個を袋 B からランダムに取り出した球 1 個と交換する。$n$ 回の試行の後、袋 A に赤球が入っている確率 $p_n$ を求めよ。

**問 1.6.** 複素数 $\alpha = a + ib$ に対して、$e^\alpha = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ と定める。三角関数の加法定理を用いて複素数 $\alpha, \beta$ に対して、$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$ を示せ。(ヒント: $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ と表し、$e^{a+c}(\cos(b + d) + i \sin(b + d)) = e^a(\cos b + i \sin b)\, e^c(\cos d + i \sin d)$ を示せばよい。)

**問 1.7** (de Moivre の定理)**.** 問 **1.6** より、$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, 即ち、$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta\ (n \in \boldsymbol{Z})$ を得る。これを用いて以下を解け。

(1) 次の値を求めよ。(a) $(1 + \sqrt{3}i)^8$, (b) $\left(\dfrac{1 + i}{\sqrt{3} + i}\right)^{12}$,

(2) $\left(\dfrac{1 + \cos\theta + i \sin\theta}{1 + \cos\theta - i \sin\theta}\right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta\ (n \in \boldsymbol{N})$ を示せ。ただし、$\theta$ は $\pi$ の奇数倍ではないとする。

**問 1.8.** 次の方程式の根を求め、それらを表す点を複素平面上に図示せよ。

(a) $x^4 = -1$,　　(b) $x^3 = 8i$,　　(注意: 三角関数を用いた表示はダメ。)

**問 1.9.** $x^5 = 1$ を解くことにより、$\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

**問 1.10.** 複素数 $z$ について、$z + \dfrac{3}{z}$ は実数で、$3 \leqq z + \dfrac{3}{z} \leqq 4$ を満たす $z$ の範囲を、以下に従って複素数平面上に図示せよ。ただし、$\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}$ は $r$ の式、$\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$ は数値で答えよ。

(a) $z$ が負の実数のとき、$3 \leqq z + \dfrac{3}{z} \leqq 4$ を満たさないことを確認せよ。

(b) (a) より $z = r \cos\theta + ir \sin\theta\ (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$ とでき、$z + \dfrac{3}{z} = (\boxed{\text{ア}}) \cos\theta + i\, (\boxed{\text{イ}}) \sin\theta$ と表せる。

(c) $z + \dfrac{3}{z}$ は実数であるから、$(\boxed{\text{イ}}) \sin\theta = 0$ となる。よって、$r = \boxed{\text{ウ}}$ または $\theta = \boxed{\text{エ}}$ となる。

(d) $r = \boxed{\text{ウ}}$ のとき $\theta$ の範囲を、$\theta = \boxed{\text{エ}}$ のとき $r$ の範囲を、$3 \leqq z + \dfrac{3}{z} (= (\boxed{\text{ア}}) \cos\theta) \leqq 4$ を満たすように定め、複素数平面上に図示せよ。

**問 1.11.** 複素数 $z$ について、$|z| = 1$ のとき、$w = \dfrac{z}{2} + 2\bar{z}$ が複素数平面上に描く軌跡を次のように求めよ。

(a) $z = \cos\theta + i \sin\theta$ とするとき、$w = \dfrac{z}{2} + 2\bar{z}$ の実部 $x$, 虚部 $y$ を $\theta$ の式を用いて表し、そこから $\theta$ を消去し、$x$ と $y$ の満たす方程式を導け。

(b) $z = \cos\theta + i \sin\theta$ とするとき、$\left|\dfrac{z}{2} + 2\bar{z} - 2\right|$ を $\cos\theta$ の式で表せ。また、$\left|\dfrac{z}{2} + 2\bar{z} + 2\right|$ を $\cos\theta$ の式で表せ。

(c) $\left|\dfrac{z}{2} + 2\bar{z} - 2\right| + \left|\dfrac{z}{2} + 2\bar{z} + 2\right| = 5$ を示し、複素数平面上での $w$ の軌跡が実軸上の二つの点 $2$ と $-2$ を焦点とする楕円であることを確かめよ。