アクチュアリー「数学」演習

杉浦　誠

2014 年 7 月 29 日

目次

これは 2014 年度前期に情報理論 I として行うアクチュアリー試験「数学」用の講義ノートです。教科書・参考書として以下を用いています。

- 藤田岳彦 著 弱点克服大学生の確率・統計 東京図書, 2010
- 黒田耕嗣 著 生保年金数理 培風館, 2007
- 新訂 確率統計 大日本図書 (統計と社会の教科書)
- 浅野長一郎 江島伸興 李賢平 共著 基本統計学 森北出版, 1993
- 国沢清典編 確率統計演習 2 統計 培風館, 1966
- 稲垣宣生 著 数理統計学 裳華房, 2003

教科書・参考書は今後増えていく予定です。

1　確率

この授業では事象 (σ-集合族)、確率空間、確率変数などの厳密な定義は確率統計学 I の講義で行うとして、具体的に計算できるようになることに主眼をおく。

参考書として「藤田岳彦 著 弱点克服大学生の確率・統計 東京図書」をあげておく。

1.1　復習

統計と社会で学んだことを復習しておこう。

Ω は全事象 (標本空間ともいう) とし、Ω の部分集合 A が事象であるとは「確率 P(A) がわかる集合」、$P(A)$ は集合 A の「大きさ」とみなす。そのため次の性質がなりたつ。((1), (2) は定義です。)

(1) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ であり、事象 $A \subset \Omega$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) 事象 $A_1, A_2, A_3, \dots$ が互いに排反、すなわち、$i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ を満たせば

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots .$$

(3) 事象 A, B について $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(2) は有限個でも可算無限個でもよい。(3) は次のように拡張される。A, B, C, D が事象であれば

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\
&\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) \\
&\quad + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\
&\quad - P(A \cap B \cap C \cap D)
\end{aligned}$$

が成り立つ。事象が 5 つ以上ある場合も容易に推測できよう。

(**事象の独立性**) 事象 A, B が独立であるとは、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ と定めた。
事象 A, B, C が独立であるとは、A, B, C のどの 2 つも独立かつ $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ と定める。
事象 A, B, C, D が独立であるとは、A, B, C, D のどの 3 つも独立 (特にどの 2 つも独立であることに注意) かつ $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B)P(C)P(D)$ と定める。
5 つ以上の事象の独立性も同様に定義される。

(**条件付き確率**) 事象 A, B に対して $P(A) > 0$ であるとき、A の下での B の起こる条件付き確率を $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ と定めた。

例題 1.1 $\Omega = \{1, 2, \dots, 90\}$ から一つの数字をランダムに選び、その数が k の倍数であるか考える。
$A_k = \{km \in \Omega; m \in \mathbb{Z}\}$ とする。

(1) $P(A_k)$, $k = 2, 3, 4, 5$ を求めよ。　(2) A_2 と A_3 が独立を示せ。また、A_3 と A_4 は独立か調べよ。

(3) $P(A_3|A_4)$ を求めよ。　(4) $P(A_2 \cup A_3)$, $P(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$ を求めよ。

解: (1) $P(A_2) = 1/2$, $P(A_3) = 1/3$, $P(A_4) = 22/90 = 11/45$, $P(A_5) = 1/5$.
(2) $P(A_2 \cap A_3) = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = P(A_2)P(A_3)$ より A_2 と A_3 は独立。
一方、$P(A_3 \cap A_4) = \dfrac{7}{90} \neq \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{22}{90} = P(A_3)P(A_4)$ より A_3 と A_4 は独立ではない。
(3) $P(A_3|A_4) = \dfrac{P(A_3 \cap A_4)}{P(A_4)} = \dfrac{7}{22}$.　(4) $P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$.

$$
\begin{aligned}
P(A_2\cup A_3\cup A_5) &= P(A_2)+P(A_3)+P(A_5)-P(A_2\cap A_3)-P(A_2\cap A_5)-P(A_3\cup A_5)+P(A_2\cap A_3\cap A_5)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{11}{15}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

問題 1.1 $\Omega=\{1,2,\dots,210\}$ から一つの数字をランダムに選び、その数が k の倍数であるか考える。$A_k=\{km\in\Omega; m\in\mathbb{Z}\}$ とする。

(1) $P(A_k)=1/k,\ k=2,3,5,6,7$ を確認せよ。また、$P(A_4)$ を求めよ。

(2) A_2 と A_3 が独立を示せ。また、A_3 と A_4 は独立か調べよ。

(3) $P(A_3|A_4), P(A_4|A_3)$ を求めよ。

(4) $P(A_2\cup A_3),\ P(A_2\cup A_3\cup A_7),\ P(A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7)$ を求めよ。

(**確率変数**) X が確率変数であるとは

$$
\{X=a\},\quad \{X\geq a\},\quad ,\{X\leq b\},\quad \{a<X\leq b\}
$$

が事象である、つまりその確率がわかる X である。

特に X の取りうる値が N 個 $(N<\infty)$ もしくは可算無限個 (以下 $N=\infty$ と解釈する) であるとき、それを $a_1,a_2,\cdots$ とすると、関数 ϕ に対して $\phi(X)$ の期待値 $E[\phi(X)]$ を

$$
E[\phi(X)]=\sum_{k=1}^{N}\phi(a_k)P(X=a_k)
$$

と定める。また、$\phi(X)$ が正負の双方の値をとるときは

$$
E[|\phi(X)|]=\sum_{k=1}^{N}|\phi(a_k)|P(X=a_k)<\infty
$$

となる場合のみを考えるものとする。また、$E[X]$ を X の平均、$V(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$ を X の分散、$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ を X の標準偏差という。定数 a,b に対して

$$
E[aX+b]=aE[X]+b,\qquad V(aX+b)=a^2V(X),\quad \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X).
$$

に注意する。証明は各自試みよ。$V(X)\geq 0,\ \sigma(X)\geq 0$ に注意する。

例題 1.2 c を定数とする。$P(X=k)=ck\ (k=1,2,\dots,N)=0$ (その他) のとき、以下を求めよ。

(1) 定数 c (2) $E[X]$ (3) $V(X)$ (4) $E[2^X]$

解: (1) $1=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}ck=c\frac{N(N+1)}{2}$, よって $c=\dfrac{2}{N(N+1)}$.

(2) $E[X]=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}kP(X=k)=c\sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{2N+1}{3}$.

(3) $E[X^2]=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}k^2P(X=k)=c\sum_{k=1}^{N}k^3=\frac{N(N+1)}{2}$. $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\dfrac{(N-1)(N+2)}{18}$.

(4) $a\neq 1$ に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}a^k=\frac{a^{N+1}-1}{a-1}$ に注意する。これを a について微分して

$$
\sum_{k=1}^{N}ka^{k-1}=\frac{(N+1)a^N(a-1)-(a^{N+1}-1)\cdot 1}{(a-1)^2}=\frac{Na^{N+1}-(N+1)a^N+1}{(a-1)^2}. \tag{1.1}
$$

$$
E[2^X]=\sum_{k=1}^{N}2^kP(X=k)=2c\sum_{k=1}^{N}k2^{k-1}=\frac{4(N2^{N+1}-(N+1)2^N+1)}{N(N+1)}=\frac{4((N-1)2^N+1)}{N(N+1)}. \qquad \square
$$

問題 1.2 c を定数とする。$P(X=k)=ck(k+1)$ $(k=1,2,\ldots,N)=0$ (その他) のとき、以下を求めよ。
(1) 定数 c　(2) $E[X]$　(3) $E[(X+2)(X+3)]$　(4) $V(X)$　(5)♠ $E[3^X]$　(♠ は計算が面倒の意味)

ヒント: $b_k=k(k+1)$, $c_k=k(k+1)(k+2)$, $d_k=k(k+1)(k+2)(k+3)$ とすると、
$c_k-c_{k-1}=k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)=3b_k$ より

$$\sum_{k=1}^{N}b_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3}(c_k-c_{k-1})=\frac{1}{3}(c_1-c_0+c_2-c_1+\cdots+c_N-c_{N-1})=\frac{1}{3}(c_N-c_0)=\frac{1}{3}c_N.$$

すなわち、$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}k(k+1)=\frac{N(N+1)(N+2)}{3}$ を得る。

同様に、$d_k-d_{k-1}=4c_k$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}k(k+1)(k+2)=\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4}$ を得る。

(3) ではまったく同様に得られる $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}{5}$ を用いよ。(4) は $E[(X-2)(X-3)]=E[X^2]-5E[X]+6$ を、(5) は (1.1) の両辺を微分することで得られる、$\displaystyle\sum_{k=2}^{N}k(k-1)a^{k-2}=\sum_{l=1}^{N-1}(l+1)la^{l-1}$ の公式を導き用いよ。(等号は $l=k-1$ とした。)　□

(**同時確率分布**) 2 つの離散型確率変数 X,Y を考える。X のとり得る値を $a_1,a_2,\ldots,a_M$, Y のとり得る値を $b_1,b_2,\ldots,b_N$ とする。確率変数の組 (X,Y) に対し $P(X=a_i,Y=b_j)$ をその同時分布といい、それを表にしたものを同時 (確率) 分布表という。また、

$$P(X=a_i)=\sum_{j=1}^{N}P(X=a_i,Y=b_j),\qquad P(X=b_j)=\sum_{i=1}^{M}P(X=a_i,Y=b_j)$$

をそれぞれ X,Y の周辺 (確率) 分布という。関数 $\phi(x,y)$ に対して

$$E[\phi(X,Y)]=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\phi(a_i,b_j)P(X=a_i,Y=b_j)$$

と定める。特に、

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]\qquad \text{を } (X,Y) \text{ の共分散} \tag{1.2}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}\qquad \text{を } (X,Y) \text{ の相関係数という。} \tag{1.3}$$

と定め、

例 1.3 袋の中に 1, 2, 3 の数字の書かれた球がそれぞれ 5 個, 3 個, 2 個入っている。この袋から 1 個ずつ球を取り出すとき、1 個め, 2 個めに出た球に書かれていた数字をそれぞれ (1) 非復元抽出のとき X_1,Y_1 とし、(2) 復元抽出のとき X_2,Y_2 とする。このとき、(X_1,Y_1) と (X_2,Y_2) の同時確率分布表はそれぞれ左のようになる。これより、X_1 と X_2 の Y_1 と Y_2 の周辺分布は等しいが、(X_1,Y_1) と (X_2,Y_2) の同時確率分布は異なることがわかる。また、このとき、

X_1 \ Y_1	1	2	3	計
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{5}$
計	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

(1) 非復元抽出

X_2 \ Y_2	1	2	3	計
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$
計	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

(2) 復元抽出

$$E[X_1]=E[X_2]=E[Y_1]=E[Y_2]=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{17}{10},$$

$$E[{X_1}^2]=E[{X_2}^2]=E[{Y_1}^2]=E[{Y_2}^2]=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{35}{10}$$

$$\text{より}\qquad V(X_1)=V(X_2)=V(Y_1)=V(Y_2)=\frac{35}{10}-\Big(\frac{17}{10}\Big)^2=\frac{61}{100}.$$

$$E[X_1Y_1]=1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{1}{15}+3^2\cdot\frac{1}{45}+2\Big(2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{15}\Big)=\frac{127}{45}$$

$$\text{より}\qquad \mathrm{Cov}(X_1,Y_1)=\frac{127}{45}-\frac{17}{10}\cdot\frac{17}{10}=-\frac{61}{900},\qquad \rho(X_1,Y_1)=-\frac{1}{9},$$

$$E[X_2Y_2]=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{9}{100}+3^2\cdot\frac{1}{25}+2\Big(2\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{1}{10}+6\cdot\frac{3}{50}\Big)=\frac{289}{100}$$

$$\text{より}\qquad \mathrm{Cov}(X_2,Y_2)=\frac{289}{100}-\frac{17}{10}\cdot\frac{17}{10}=0,\qquad \rho(X_2,Y_2)=0$$

となる。 □

問題 1.3 右の表のような (X,Y) の同時分布を考える。

(1) X の周辺分布, Y の周辺分布、$E[X],V(X),E[Y],V(Y)$ を求めよ。

(2) $E[XY],\mathrm{Cov}(X,Y),\rho(X,Y)$ を求めよ。

(3) $W=\max\{X,Y\}$ の確率分布、$E[W]$ を求めよ。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

一般に (離散型とは限らない) 確率変数 $X_1,X_2,\ldots,X_m$ が任意の区間 $A_1,A_2,\ldots,A_m\subset\mathbf{R}$ に対して

$$P(X_1\in A_1,X_2\in A_2,\cdots,X_m\in A_m)=P(X_1\in A_1)P(X_2\in A_2)\cdots P(X_m\in A_m)\tag{1.4}$$

を満たすとき、$X_1,X_2,\ldots,X_m$ は**独立**であるという。例 1.3 で X_2,Y_2 は独立である。一方、X_1,Y_1 は独立ではない。また、$X_1,X_2,\ldots,X_m$ が独立であれば、“よい” 関数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ に対して

$$E[\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)\cdots\varphi_m(X_m)]=E[\varphi_1(X_1)]E[\varphi_2(X_2)]\cdots E[\varphi_m(X_m)]\tag{1.5}$$

となる。特に、X,Y が独立であれば

$$\mathrm{Cov}(X,Y)\overset{\text{定義}}{=}E[XY]-E[X]E[Y]\overset{\text{独立性}}{=}E[X]E[Y]-E[X]E[Y]=0.\tag{1.6}$$

となる。$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ のとき、X,Y は無相関であるというが、一般に無相関であっても独立とは限らないことに注意する。さらに、$\tilde{X}=X-E[X]$, $\tilde{Y}=Y-E[Y]$ とおくと、定数 a,b に対して

$$\begin{aligned}V(aX+bY)&=E[\big(aX+bY-E[aX+bY]\big)^2]=E[\big(a\tilde{X}+b\tilde{Y}\big)^2]=a^2E[\tilde{X}^2]+2abE[\tilde{X}\tilde{Y}]+b^2E[\tilde{Y}^2]\\&=a^2V(X)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)+b^2V(Y)\end{aligned}$$

となるが、もし X,Y が無相関であれば

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$$

が成立する。全く同様に

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_m)=\sum_{i=1}^m V(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le m}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\tag{1.7}$$

が、特に $X_1,X_2,\ldots,X_m$ が独立であれば

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_m)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_m).\tag{1.8}$$

が成立する。

1.2 離散型確率分布

微積分の復習をする。[SS, p.43] とは吹田, 新保共著 理工系の微分積分学の p.43 を見よと解釈せよ。

命題 1.1 [SS, p.43] 主なマクローリン展開式をあげる。

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \qquad (|x| < \infty)$

(2) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \ (|x| < 1)$

ただし、α は定数で $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ と定める。

注意 1.1 (2) で α が自然数のとき $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ となるが、$n > \alpha$ であれば , $\alpha-1, \dots, \alpha-n+1$ の一つが 0 であるため $\dbinom{\alpha}{n} = 0$ となる。これより (2) は $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n$ となるが、これは通常の二項定理である。

例題 1.4 $|x| < 1$ として $(1-x)^{-2}$ を無限級数で表せ。

解: $\dbinom{-2}{n} = \dfrac{-2(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!} = (-1)^n \dfrac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{n!} = (-1)^n(n+1)$ より、(2) を用いると、

$$\begin{aligned}(1-x)^{-2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\ &= 1 + x + 2x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots . \qquad \square\end{aligned}$$

注意 1.2 等比級数の公式 $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ の右辺の級数の収束半径が 1 であることに注意すれば、項別微分の定理 [SS, p.146] を用い両辺を微分することで上式は得られる。また、さらに微分することで問題 1.4 (2) は証明できる。

問題 1.4 $|x| < 1$ のとき、命題 1.1 (2) を用いて次を示せ。

(1) $(1-x)^{-3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, \qquad$ (2) $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\dfrac{x}{4}\right)^n.$

Bernoulli 試行 Be(p): 歪んだコイン投げのように、結果 S (success) の起こる確率が p, 結果 F (false) が起こる確率が $q := 1-p$ となる試行 (**Bernoulli 試行**という) を繰り返し行う。このとき、確率変数 X_k を k 回目の試行で S が起これば 1, F が起これば 0 と定めれば、$X_1, X_2, \cdots$ は独立で同じ分布に従う。この $X_1, X_2, \cdots$ を Bernoulli 試行 Be(p) に付随する確率変数列といい、以降 $X_1, X_2, \cdots \sim \mathrm{Be}(p)$ と表すこととする。このとき、各 k に対して

$$E[X_k] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \quad E[X_k^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p, \tag{1.9}$$

$$V(X_k) = E[X_k^2] - (E[X_k])^2 = p(1-p) \tag{1.10}$$

に注意する。

二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$: Bernoulli 試行 $\mathrm{Be}(p)$ を n 回行うとき結果 S が起こる回数を Y とすると

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,\ldots,n$$

となる。このとき Y は $\mathrm{B}(n,p)$ に従うといい、$Y\sim\mathrm{B}(n,p)$ と表す。

$X_1,X_2,\cdots\sim\mathrm{Be}(p)$ とすると、$Y=X_1+\cdots+X_n\sim\mathrm{B}(n,p)$ は明らかであろう。これより、

$$E[Y]=E[X_1+\cdots+X_n]=np \qquad V(Y)=V(X_1+\cdots+X_n)=V(X_1)+\cdots+V(X_n)=np(1-p)$$

となる。ここで、(1.9) と (1.8), (1.10) を用いた。

問題 1.5 $Y\sim\mathrm{B}(n,p)$ のとき、二項定理を用いて、$E[Y]=np$, $V(Y)=np(1-p)$ を示せ。

幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$: Bernoulli 試行 $\mathrm{Be}(p)$ において S が初めて出現するまでの F の出現回数を X とすると

$$P(X=k)=(1-p)^kp \qquad k=0,1,2,\ldots$$

となる。このとき X は $\mathrm{Ge}(p)$ に従うといい、$X\sim\mathrm{Ge}(p)$ と表す。

等比級数の公式により $\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$ に注意する。また、平均は例題 1.4 を用いれば、

$$E[X]=0\cdot p+1\cdot qp+2\cdot q^2p+\cdots+kq^kp+\cdots=pq\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k=\frac{pq}{(1-q)^2}=\frac{1-p}{p}$$

と求まる。ただし $q=1-p$ とした。分散のため、問題 1.4(1) より

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^kp\overset{l:=k-2}{=}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)(l+2)q^{l+2}p=\frac{2pq^2}{(1-q)^3}=\frac{2q^2}{p^2}$$

に注意すれば $V(X)=E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2=\dfrac{2q^2}{p^2}+\dfrac{q}{p}-\dfrac{q^2}{p^2}=\dfrac{1-p}{p^2}$ を得る。

例題 1.5 X,Y は独立でともに $\mathrm{Ge}(p)$ に従うとき $P(\min\{X,Y\}\ge k)$, $k=0,1,\ldots,$ と $E[\min\{X,Y\}]$ および $E[\max\{X,Y\}]$ を求めよ。

解: $q=1-p$ とする。

$$P(\min\{X,Y\}\ge k)=P(X\ge k,Y\ge k)=P(X\ge k)P(Y\ge k)=\Big(\sum_{n=k}^{\infty}q^np\Big)^2=\Big(\frac{q^kp}{1-q}\Big)^2=q^{2k}.$$

よって、$P(\min\{X,Y\}=k)=P(\min\{X,Y\}\ge k)-P(\min\{X,Y\}\ge k-1)=q^{2k}-q^{2(k+1)}=(q^2)^k(1-q^2)$ より、$\min\{X,Y\}\sim\mathrm{Ge}(1-q^2)$ となるので、$E[\min\{X,Y\}]=\dfrac{1-(1-q^2)}{1-q^2}=\dfrac{(1-p)^2}{p(2-p)}$. また、一般に $X+Y=\max\{X,Y\}+\min\{X,Y\}$ であるから、

$$E[\max\{X,Y\}]=E[X]+E[Y]-E[\min\{X,Y\}]=\frac{(1-p)(3-p)}{p(2-p)}. \qquad \square$$

問題 1.6 (1) $X\sim\mathrm{Ge}(p)$ とし、$k,l=0,1,\ldots$ とするとき、次を求めよ。

(a) $P(k\le X\le k+l)$ (b) $P(X\ge k+l|X\ge k)$ (c) $E[t^X]$ $(0<t<1/(1-p))$

(d) $E[X(X-1)(X-2)]$ (e) $E[X^3]$ (f) $E[(X-E[X])^3]$

(2) X,Y が独立で $X\sim\mathrm{Ge}(p)$, $Y\sim\mathrm{Ge}(q)$ のとき、$P(X<Y)$ および $P(X=2Y)$ を求めよ。

負の二項分布 NB(α,p): Bernoulli 試行 Be(p) を、S が α 回出現するまで反復するとき、F が出現する回数を Y とする。このとき、Y のとり得る値は $0,1,\ldots$ で、$Y=k$ となるのは $\alpha+k$ 回の試行で結果 S は最後を除いて $\alpha-1$ 回、F は k 回出現するときなので

$$P(Y=k)=\binom{\alpha+k-1}{k}p^{\alpha}(1-p)^{k} \qquad (k=0,1,\ldots) \tag{1.11}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\binom{\alpha+k-1}{k}&=\frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)\alpha}{k!}\\&=(-1)^k\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}=(-1)^k\binom{-\alpha}{k}\end{aligned}$$

と命題 1.1 (2) を用いて、

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=k)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\alpha}{k}p^{\alpha}(1-p)^k=p^{\alpha}(1-(1-p))^{-\alpha}=1$$

となる。この分布を負の二項分布 NB(α,p) という。

注意 1.3 整数とは限らない $\alpha>0$ に対しても (1.11) を用いて負の二項分布 NB(α,p) は定義される。

$Y\sim$ NB(α,p) のとき、$k=1,2,\ldots$ に対して

$$k\binom{\alpha+k-1}{k}=\frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)\alpha}{(k-1)!}=\alpha(-1)^{k-1}\binom{-\alpha-1}{k-1}$$

より $q=1-p$ とすると

$$\begin{aligned}E[Y]&=\sum_{k=1}^{\infty}k\binom{\alpha+k-1}{k}p^{\alpha}q^{k}=\alpha p^{\alpha}q\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\binom{-\alpha-1}{k-1}q^{k-1}\\&=\alpha p^{\alpha}q\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-\alpha-1}{l}(-q)^{l}=\alpha p^{\alpha}q(1-q)^{-\alpha-1}=\frac{\alpha(1-p)}{p}\end{aligned}$$

を得る。2 行目の最初の等号は $l=k-1$ とおき、次の等式は命題 1.1 (2) を用いた。

注意 1.4 α が自然数であれば $X_1,\ldots,X_\alpha$ を独立で Ge(p) に従う確率変数とし $Y=X_1+\cdots+X_\alpha$ とすると $Y\sim$ NB(α,p) となる。よって、

$$E[Y]=E[X_1]+\cdots+E[X_\alpha]=\frac{\alpha(1-p)}{p}$$

を得る。同様に (1.8) より $V(Y)=V(X_1)+\cdots+V(X_\alpha)=\dfrac{\alpha(1-p)}{p^2}$ を得る。

問題 1.7 α を自然数とは限らない正数とし、$Y\sim$ NB(α,p) する。$k=2,3,\ldots$ のとき $k(k-1)\binom{\alpha+k-1}{k}=\alpha(\alpha+1)(-1)^{k-2}\binom{-\alpha-2}{k-2}$ を示し、$E[Y(Y-1)]$ を求め、$V(Y)=\dfrac{\alpha(1-p)}{p^2}$ を示せ。また、$P(Y\geq k)$ と $E[t^Y]$ を求めよ。

Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$: $\lambda > 0$ とする。確率変数 X が非負整数値で、その確率関数が

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.12}$$

で与えられるとき、この確率変数 X は Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うという。命題 1.1 (1) より $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$ が従う。Poisson 分布は次の命題で見るように、一定時間間隔の事故の件数などを表すと考ええられる。

命題 1.2 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して、確率変数 X_n は二項分布 $\mathrm{B}(n, p_n)$ に従うとする。ここで、p_n は $0 < p_n < 1$ および $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ を満たすとする。このとき、$\{X_n\}$ は *Poisson* 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ を近似している、即ち、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

証明: $P(X = k) = 1\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \dfrac{k-1}{n}\Big) \dfrac{(np_n)^k}{k!} \Big\{\Big(1 - \dfrac{np_n}{n}\Big)^n\Big\}^{1-\frac{k}{n}} \to \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(n \to \infty)$ $\square$

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ に対して、再び命題 1.1 (1) を用いて

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} = \lambda,$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2.$$

よって $V(X) = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 = \lambda$.

問題 1.8 X, Y は独立で $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Po}(\mu)$ とするとき、以下を求めよ。ただし $k, n = 0, 1, 2, \ldots, k \le n$ とする。

(1) $E[X(X-1)(X-2)]$ (2) $E[X^3]$ (3) $E[(X - E[X])^3]$ (4) $E[t^X]$
(5) $P(XY = 0)$ (6) $P(X + Y = n)$ (7) $P(X = k | X + Y = n)$

超幾何分布 $\mathrm{HG}(N, m, n)$: 壺の中に赤球 m 個と白球 $N - m$ 個の球が入っている。ここから n 個の球を取り出すときの白球の個数を X とする。このとき、

$$P(X = k) = \frac{\dbinom{m}{n}\dbinom{N-m}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}, \ k = \max\{0, n - (N - m)\}, 1, \cdots, \min\{m, n\} \qquad = 0 \ (\text{その他})$$

となる。この X の分布を超幾何分布 $\mathrm{HG}(N, m, n)$ という。$\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} P(X = k) = 1$ となることは、$(x+1)^{N-m}$ と $(x+1)^m$ を二項定理を用いて展開しその x^k と x^{n-k} の係数の積を足し合わせたものが、$(x+1)^N$ の展開式の x^n の係数と一致することを用いて示せる。X の平均、分散を求めるため次の X_i, $i = 1, \ldots, n$ を導入する:

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目に取り出した球が赤} \\ 0 & i \text{ 番目に取り出した球が白} \end{cases}$$

N 個すべて取り出して並べると考えると、N 個の総順列 $N!$ のうち i 番目が赤球であるのは $m \cdot (N-1)!$ であり、$i \neq j$ に対し i, j 番目がともに赤球であるのは $m(m-1) \cdot (N-2)!$ であるから

$$P(X_i = 1) = \frac{m \cdot (N-1)!}{N!} = \frac{m}{N}, \qquad P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{m(m-1) \cdot (N-2)!}{N!} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

ゆえに

$$E[X_i] = E[X_i^2] = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = \frac{m}{N},$$

$$E[X_i X_j] = 1 \cdot P(X_i X_j = 1) + 0 \cdot P(X_i X_j = 0) = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}$$

$$V(X_i) = \frac{m}{N} - \Big(\frac{m}{N}\Big)^2 = \frac{m(N-m)}{N^2}, \qquad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{m(m-1)}{N(N-1)} - \Big(\frac{m}{N}\Big)^2 = -\frac{m(N-m)}{N^2(N-1)}$$

よって、$X = X_1 + \cdots + X_n$ より $E[X] = E[X_1] + \cdots E[X_n] = nm/N$, (1.7) を用いて

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = n\frac{m(N-m)}{N^2} + n(n-1)\Big\{-\frac{m(N-m)}{N^2(N-1)}\Big\} \\ &= \frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)} \end{aligned}$$

を得る。$cf.$ $E[(X - E[X])^3] = \dfrac{mn(N-m)(N-n)(N-2m)(N-2n)}{N^3(N-1)(N-2)}$. □

問題 1.9 1 から N までの数字が一つずつ書かれたカードが全部で N 枚ある。ここから無作為にカードを 1 枚取り出してカードの番号を調べて元に戻さない操作を繰り返す。i 番目の試行でのカードの番号を X_i とする。以下を求めよ。

(1) $i \neq j$, $k \neq l$ に対して $P(X_i = k, X_j = l)$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, $V(X_1 + X_2 + X_3)$

(2) $P(\max\{X_1, X_2\} \le k)$, $E[\max\{X_1, X_2\}]$

1.3 連続型確率分布

確率変数 X の分布関数を $F_X(x) = P(X \le x)$ と定める。$F_X(x)$ が連続であるとき X は連続型確率変数という。ここでは、特に区分的に連続な関数 $f_X(x)$ が存在して

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

と表せるときを考える。この $f_X(x)$ を X の密度関数という。このとき、

$$f_X(x) \ge 0 \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{かつ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = 1$$

となることに注意する。“よい” 関数 $\varphi(x)$ に対して

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x)\,dx$$

と定める。以下、確率変数 U に対して F_U で U の分布関数を f_U で U の密度関数を表すものとする。

例題 1.6 X の密度関数が $f_X(x) = cx^{-1}$ $(1 \le x \le e^2)$, $= 0$ (その他) のとき、以下を求めよ。

(1) 定数 c (2) $E[X]$ (3) $V(X)$

解: (1) $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{e^2} \frac{c}{x}\,dx = 2c.$ よって、$c = \dfrac{1}{2}$.

(2) $E[X] = \displaystyle\int_1^{e^2} x \cdot \frac{c}{x}\,dx = \frac{e^2-1}{2}$.

(3) $E[X^2] = \displaystyle\int_1^{e^2} x^2 \cdot \frac{c}{x}\,dx = \frac{e^4-1}{4}$ より $V(X) = \dfrac{e^4-1}{4} - \Big(\dfrac{e^2-1}{2}\Big)^2 = \dfrac{e^2-1}{2}$. □

問題 1.10 X の密度関数が $f_X(x) = c(1+x^2)^{-1}$ $(0 \leq x \leq \sqrt{3})$, $= 0$ (その他) のとき、以下を求めよ。

(1) 定数 c　(2) $E[X]$　(3) $V(X)$　(4) X の分布関数 $F_X(x)$

命題 1.3 ($cf.$ [SS, pp.118–9, pp.208–9]) ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ $(s > 0)$ と
ベータ関数 $\mathrm{B}(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ $(p,q > 0)$ について、以下が成立する。

(1) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$.
(2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s > 0)$ 特に、自然数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(3) $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $(p,q > 0)$.

注意 1.5 $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$ は $\Gamma(1) = 1$ と (2), (3) から導くこともできる。
実際、$y = \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \Big(x - \dfrac{1}{2}\Big)^2}$ が中心 $\Big(\dfrac{1}{2}, 0\Big)$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の上半分であることに注意すると

$$\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)^2 = \Gamma(3)\mathrm{B}\Big(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\Big) = 2!\cdot\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{\pi}{4}, \qquad \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

より $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = 2\Gamma\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}$.

例題 1.7 以下の値を求めよ。ただし、$v > 0$, $a < b$ とする。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2v}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\,d\theta$　(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(x+1)^7}\,dx$

解: (1) $s = \dfrac{x^2}{2v}$ とおくと (与式)$=2\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2v}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-s}\sqrt{2v}\frac{1}{2}s^{-1/2}\,ds = \sqrt{2v}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{2\pi v}$.
(2) $s = \dfrac{x-a}{b-a}$ とおくと (与式)$=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(b-a)\sqrt{s(1-s)}}(b-a)\,ds = \mathrm{B}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} = \pi$.
(3) $t = \sin^2\theta$ とおくと (与式)$=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{2\sqrt{t(1-t)}}\,ds = \frac{1}{2}\mathrm{B}\Big(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(4)} = \frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2\cdot 3!} = \frac{5\pi}{32}$.
(4) $t = \dfrac{1}{x+1}$ とおくと (与式)$=\displaystyle\int_0^1 t^7\Big(\frac{1}{t}-1\Big)^3\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 t^2(1-t)^3\,dt = \mathrm{B}(3,4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{60}$.　□

問題 1.11 以下の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^{7/2}e^{-x/2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^2 x^2(2-x)^{3/2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^6\theta\,d\theta$　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \Big(1+\frac{x^2}{2}\Big)^{-3}\,dx$

一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$: 確率変数 X の密度関数が $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$ $(a \leq x \leq b)$, $= 0$ (その他) のとき、X は区間 (a,b) 上の一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$ に従うといい、$X \sim \mathrm{U}(a,b)$ と表す。

指数分布 $\mathrm{Ex}(\lambda)$: 確率変数 X の密度関数が $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$, $= 0$ (その他) のとき、X は指数分布 $\mathrm{Ex}(\lambda)$ に従うという。指数分布は事故などの Poisoon 事象が生起する時間間隔の分布として広く用いられている。

正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$: $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ とする。X の密度関数が $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ で与えられているとき、正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従うという。例題 1.7 (1) より $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1$ は容易にわかる。特に $\mu = 0, \sigma = 1$ のとき、$\mathrm{N}(0,1)$ を標準正規分布という。

例題 1.8 (1) $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$ のとき、$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ の密度関数 $f_Z(z)$ を求めよ。
(2) $X \sim \mathrm{Ex}(2)$ のとき、$Y = X^2$ の密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。
(3) $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ のとき、$Y = X^2$ の密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。
(4) X, Y は独立で $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$, $X \sim \mathrm{Ex}(\mu)$ とし、$Z = \min\{X, Y\}$ とする。以下を求めよ。
(a) $E[X]$ (b) $P(X \geq a+b | X \geq a)$ $(a, b > 0)$ (c) $P(Z \geq a)$ $(a > 0)$ (d) $f_Z(z)$ (e) $V(Z)$

解: (1) $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq \sigma z + \mu) = F_X(\sigma z + \mu)$ より
$f_Z(z) = \dfrac{d}{dz}\{F_X(\sigma z + \mu)\} = f_X(\sigma z + \mu)\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.
(2) $P(Y > 0) = 1$ より $f_Y(y) = 0$ $(y \leq 0)$. $y > 0$ のとき $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$
より $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}\{F_X(\sqrt{y})\} = f_X(\sqrt{y})\dfrac{1}{2}y^{-1/2} = y^{-1/2}e^{-2\sqrt{y}}$.
(3) $P(Y > 0) = 1$ より $f_Y(y) = 0$ $(y \leq 0)$. $y > 0$ のとき $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =$
$F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ より $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}\{F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}$.
(4) (a) $E[X] = \displaystyle\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$. (b) $P(X \geq a) = \displaystyle\int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a}$ より (与式)$= \dfrac{P(X \geq a+b)}{P(X \geq a)}$
$= e^{-\lambda b}$. (c) $P(Z \geq a) = P(X \geq a, Y \geq a) \overset{\text{独立性}}{=} P(X \geq a)P(Y \geq a) = e^{-(\lambda+\mu)a}$.
(d) $f_Z(z) = 0$ $(z \leq 0)$ は明らか。$z > 0$ のとき $f_Z(z) = \dfrac{d}{dz}\{P(Z \leq z)\} = (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)z}$.
(e) $V(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1/(\lambda+\mu)^2$. □

問題 1.12 (1) $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき、$Y = e^X$ の密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。
(2) $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ のとき $Y = \sin \pi X$ の密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。
(3) $X \sim \mathrm{Ex}(1/\lambda)$ のとき、$E[X^n]$ $(n \in \mathbf{N})$ を求め、$E[(X-\lambda)^3]$, $E[(X-\lambda)^4]$ を求めよ。
(4) $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ のとき、$E[X^{2n}] = (2n-1)!!(= (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1)$ $(n \in \mathbf{N})$ を示せ。
(5) X, Y は独立でともに $\mathrm{U}(0,1)$ に従うとし、$Z = \max\{X, Y\}$ とする。以下を求めよ。
(a) $P(Z \leq a)$ $(0 \leq a \leq 1)$ (b) $f_Z(z)$ (c) $E[Z]$ (d) $V(Z)$

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$: 確率変数 X の密度関数が $f_X(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$ $(x > 0)$, $= 0$ (その他) のとき、X はガンマ分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ に従うといい、$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ と表す。

ベータ分布 $\mathrm{B{\scriptstyle ETA}}(a, b)$: 確率変数 X の密度関数が $f_X(x) = \dfrac{1}{\mathrm{B}(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $(0 < x < 1)$, $= 0$ (その他) のとき、X はベータ分布 $\mathrm{B{\scriptstyle ETA}}(a, b)$ に従うとい、$X \sim \mathrm{B{\scriptstyle ETA}}(a, b)$ と表す。

注意 1.6 (1) ガンマ分布 $\Gamma(1, \beta)$ は指数分布 $\mathrm{Ex}(\beta)$ と一致する。また、ベータ分布 $\mathrm{B{\scriptstyle ETA}}(1,1)$ は一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ である。このことは密度関数を比較すれば明らかである。
(2) 例題 1.8(3) より $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ のとき $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ がわかる。

定義 1.1 次の 3 つの分布は数理統計学で特に重要である。

χ^2 **分布**: ガンマ分布 $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ を特に**自由度** n **の** χ^2 **分布**といい、χ_n^2 で表す。$X_1, \ldots, X_n$ を独立で $\mathrm{N}(0,1)$ に従うとするとき、$X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2$. これは注意 1.6(2) と例題 1.11(4) から成立する。

t **分布**: Y, Z は独立で $Y \sim \chi_n^2$, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ のとき、$T = Z \Big/ \sqrt{\frac{Y}{n}}$ の分布を**自由度** n **の** t **分布**といい t_n で表す。標語的に $t_n = \mathrm{N}(0,1) \Big/ \sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}$ と表す。

F **分布**: X, Y は独立で $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$ のとき、$W = \frac{X}{m} \big/ \frac{Y}{n}$ の分布を**自由度** (m, n) **の** F **分布**といい F_n^m で表す。標語的に $F_n^m = \frac{\chi_m^2}{m} \Big/ \frac{\chi_n^2}{n}$ と表す。

例題 1.9 (1) $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ のとき $E[X^c]$ $(c \in \mathbf{R})$ を求めよ。
(2) $n \geq 3$ のとき $T \sim t_n$ のとき $E[T^2]$ を求めよ。
(3) $X \sim \textrm{B}\small{\textrm{ETA}}(a,b)$ のとき $Y = \dfrac{X}{1-X}$ の密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。また $b > 2$ のとき $E[Y]$, $V(Y)$ を求めよ。(この Y の分布を第 2 種ベータ分布という。)

解: (1) $E[X^c] = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^\infty x^{c+\alpha-1} e^{-\beta x}\,dx = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \dfrac{\Gamma(\alpha+c)}{\beta^{\alpha+c}} = \dfrac{\Gamma(\alpha+c)}{\beta^c \Gamma(\alpha)}$ $(c+\alpha > 0$ のとき$)$,
$E[X^c] = \infty$ $(c+\alpha \leq 0$ のとき$)$.
(2) $Y \sim \chi^2_n$, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ となる独立な Y, Z を用いて $T = Z \Big/ \sqrt{\frac{Y}{n}}$ と表せる。$Z^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $Y \sim \Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$
より $E[T^2] = E\Big[\dfrac{Z^2}{Y/n}\Big] \overset{\text{独立性}}{=} nE[Z^2]E[Y^{-1}] \overset{(1)}{=} n \cdot \dfrac{\Gamma(\frac{5}{2})}{(\frac{1}{2})^2\Gamma(\frac{1}{2})} \dfrac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{(\frac{1}{2})^{-1}\Gamma(\frac{n}{2})} = \dfrac{3n}{n-2}$.
(3) $P(0 < X < 1) = 1$ より $P(Y > 0) = 1$. よって $f_Y(y) = 0$ $(y \leq 0)$. $y > 0$ に対して $F_Y(y) = P(Y \leq y)$
$= P\Big(X \leq \dfrac{y}{1+y}\Big) = F_X\Big(\dfrac{y}{1+y}\Big)$ より $f_Y(y) = f_X\Big(\dfrac{y}{1+y}\Big)\dfrac{1}{(1+y)^2} = \dfrac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\dfrac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}$.
例題 1.7(4) と同様に $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(x+1)^{a+b}}\,dx = \mathrm{B}(a,b)$ が示せる。これより、
$E[Y] = \dfrac{1}{\mathrm{B}(a,b)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^a}{(y+1)^{a+b}}\,dy = \dfrac{\mathrm{B}(a+1,b-1)}{\mathrm{B}(a,b)} = \dfrac{a}{b-1}$. $E[Y^2] = \dfrac{\mathrm{B}(a+2,b-2)}{\mathrm{B}(a,b)} = \dfrac{(a+1)a}{(b-1)(b-2)}$
より $V(Y) = \dfrac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}$. □

問題 1.13 (1) $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ のとき (a) $E[X]$, $V(X)$, (b) $E[(X-E[X])^3]$, (c) $E[e^{-tX}]$ $(t > -\beta)$ を求めよ。
(2) $X \sim \textrm{B}\small{\textrm{ETA}}(a,b)$ のとき (a) $E[X]$, $V(X)$, (b)♠ $E[(X-E[X])^3]$ を求めよ。 (♠ は計算が面倒の意味)
(3) X, Y は独立でともに $\textrm{B}\small{\textrm{ETA}}(1,b)$ に従うとき $W = \max\{X,Y\}$ の密度関数 $f_W(w)$ と $E[W]$ を求めよ。
(4) $X \sim F^m_n$ のとき $E[X]$, $V(X)$ を求めよ。

1.4 多次元確率変数

連続型確率変数 $X_1,\ldots,X_n$ に対して、$\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が存在して

$$P((X_1,\ldots,X_n) \in D) = \int\cdots\int_D f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1 dt_2 \cdots dt_n \tag{1.13}$$

と表せるとき、$f(x_1,\ldots,x_n)$ を $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ の同時密度関数という。また、このとき、

$$E[\varphi(X_1,\cdots,X_n)] = \int\cdots\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x_1,\ldots,x_n) f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

と定める。共分散 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$ を (1.2) で、相関係数 $\rho(X_i,X_j)$ を (1.3) と同様に定める。また、(1.13) より

$$P(a \leq X_1 \leq b) = \int_a^b \Big\{\int\cdots\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_2\cdots dt_n\Big\} dt_1$$

となるから X_1 の周辺密度関数 f_{X_1} は

$$f_{X_1}(x_1) = \int\cdots\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(x_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_2\cdots dt_n$$

で与えられる。

連続型の確率変数 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ が独立であるためには、その密度関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ がそれぞれの周辺密度関数 $f_{X_1}(x_1),\cdots,f_{X_n}(x_n)$ の積となる、すなわち

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n) \tag{1.14}$$

が成立することが必要十分であることが、独立性の定義 (1.4) から従うことに注意する。

例題 1.10 (X,Y) の同時密度関数が $f(x,y)=cxy\ (0\le y\le x\le 1)$, $f(x,y)=0$ (その他) のとき次を求めよ。

(a) 定数 c (b) $P(X+Y\le 1)$ (c) X の周辺密度関数 $f_X(x)$ と $E[X]$ (d) $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (e) $P(Y+2X\le 1)$

解: $D:0\le x\le 1, 0\le y\le x$ とする。

(a) $1=\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,dxdy = c\iint_D xy\,dxdy = c\int_0^1 dx\int_0^x xy\,dy=\frac{c}{8}$ より $c=8$.

(b) $B: x+y\le 1$ とすると $D\cap B: 0\le y\le \frac{1}{2}, y\le x\le 1-y$ より

$$(\text{与式})=\iint_B f(x,y)\,dxdy=\iint_{D\cap B} 8xy\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{1-y}8xy\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}4(y-2y^2)\,dy=\frac{1}{6}.$$

(c) $P(0\le X\le 1)=1$ より $f_X(x)=0\ (x\le 0, 1\le x)$. $0<x<1$ のとき

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^x 8xy\,dy=4x^3.\ E[X]=\int_0^1 x4x^3\,dx=\frac{4}{5}.$$

(d) $P(0\le Y\le 1)=1$ より $f_Y(y)=0\ (y\le 0, 1\le y)$. $0<y<1$ のとき $f_Y(y)=\displaystyle\int_y^1 8xy\,dx=4y-4y^3$.

$$E[Y]=\int_0^1 y(4y-4y^3)\,dy=\frac{8}{15}.\ E[XY]=\iint_{\mathbf{R}^2} xyf(x,y)\,dxdy=\iint_D 8x^2y^2\,dxdy=\frac{4}{9}.$$

よって $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\dfrac{4}{225}$.

(e) $C: x+2y\le 1$ とすると $D\cap C: 0\le y\le \frac{1}{3}, y\le x\le \frac{1}{2}(1-y)$ より (与式)$=\displaystyle\iint_C f(x,y)\,dxdy$

$$=\iint_{D\cap C} 8xy\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_y^{\frac{1}{2}(1-y)}8xy\,dx=\int_0^{\frac{1}{3}}(y-2y^2-3y^3)\,dy=\frac{7}{324}.\qquad\square$$

問題 1.14 以下の (X,Y) の同時密度関数が次の $f(x,y)$ で与えられるとき、それぞれの (a)–(e) を求めよ。

(1) $f(x,y)=cxy\ (0\le x, 0\le y, x+y\le 1)$, $f(x,y)=0$ (その他) のとき

(a) 定数 c (b) $P(Y+2X\le 1)$ (c) X の周辺密度関数 $f_X(x)$ と $E[X]$ (d) $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (e) $P(Y\le 2X)$

(2) $f(x,y)=cy^2\ (0\le y, x^2+y^2\le 1)$, $f(x,y)=0$ (その他) のとき

(a) 定数 c (b) Y の周辺密度関数 $f_Y(y)$ と $E[Y]$ (c) $E[X]$ (d) $P(Y\le\sqrt{3}X)$ (e) $P(Y\le 1-|X|)$

定理 1.4 n 次元確率変数 $(X_1,\dots,X_n)$ の同時密度関数を $f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\cdots,x_n)$ とする。$\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への変換 $y_i=u_i(x_1,\cdots,x_n)\ (1\le i\le n)$ が単射で、$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\cdots,x_n)>0$ なる領域で、変換 $y_i=u_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(1\le i\le n)$ およびその逆変換 $x_i=v_i(y_1,\cdots,y_n)\ (1\le i\le n)$ がともに C^1-級であり、$\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\ne 0$ を満たすとする。このとき、$Y_i=u_i(X_1,\cdots,X_n)\ (1\le i\le n)$ で n 次元確率変数 $(X_1,\cdots,X_n)$ を $(Y_1,\cdots,Y_n)$ に変換するとき、$(Y_1,\cdots,Y_n)$ の同時密度関数 $f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,\cdots,y_n)$ は次式で与えられる。

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,\cdots,y_n)=f_{\boldsymbol{X}}(v_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,v_n(y_1,\cdots,y_n))\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|.\tag{1.15}$$

証明: $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して $E=\{(x_1,\cdots,x_n); u_1(x_1,\cdots,x_n)\le a_1,\dots,u_n(x_1,\cdots,x_n)\le a_n\}$ とおくと、この変換で E は $E'=\{(y_1,\cdots,y_n); y_1\le a_1,\dots,y_n\le a_n\}$ に対応するから、多変数関数の積分の変数変換の公式により

$$\begin{aligned}&P(Y_1\le a_1,\cdots,Y_n\le a_n)=P(u_1(X_1,\cdots,X_n)\le a_1,\cdots,u_n(X_1,\cdots,X_n)\le a_n)\\&=P((X_1,\cdots,X_n)\in E)=\int\!\cdots\!\int_E f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\int\!\cdots\!\int_{E'} f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,\cdots,y_n)\,dy_1\cdots dy_n\\&=\int_{-\infty}^{a_n}\!\cdots\!\int_{-\infty}^{a_1} f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,\cdots,y_n)\,dy_1\cdots dy_n\qquad\square\end{aligned}$$

命題 1.5 (X,Y) の密度関数を $f(x,y)$ とする。このとき、$Z=X+Y$ とすると Z の密度関数 $f_Z(z)$ は

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z-t)\,dt \tag{1.16}$$

となる。特に $P(X\geq 0,Y\geq 0)=1$ であれば $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z f(t,z-t)\,dt\ (z>0)$, $f_Z(z)=0\ (z\leq 0)$ となる。

証明: $Z=X+Y, T=X$ とし (Z,T) の同時密度関数 $g(z,t)$ を求め、Z の周辺密度関数を求めればよい。$X=T, Y=Z-T$ に注意すれば定理 1.4 より

$$g(z,t)=f(t,z-t)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}\right|=f(t,z-t)\left|\det\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\right|=f(t,z-t).$$

従って、$f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(z,t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z-t)\,dt.$
$P(X\geq 0,Y\geq 0)=1$ のとき $z\leq 0$ のとき $f_Z(z)=0$ は明らか。$z>0$ のときは (1.16) で $t\geq 0$ かつ $z-t\geq 0$ でなければ $f(t,z-t)=0$ となるので積分範囲は $0\leq t\leq z$ だけでよいとわかる。 □

命題 1.6 (X,Y) の密度関数を $f(x,y)$ とする。このとき、$U=X-Y,\ V=XY,\ W=X/Y$ とすると U,V,W の密度関数は次で与えられる。

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+u,t)\,dt,\qquad f_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(t,\frac{v}{t}\Big)\frac{1}{|t|}\,dt,\qquad f_W(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,tw)|t|\,dt. \tag{1.17}$$

証明: 命題 1.5 と全く同様に、U については $U=X-Y, T=Y$ と、V については $V=XY,\ T=X$ と、W については $W=X/Y,\ T=X$ としてそれぞれの同時密度関数を求め、U,V,W それぞれの周辺密度関数を求めればよい。 □

例題 1.11 (1) X,Y が独立でともに $U(0,1)$ に従うとし $Z=X+Y$ とおく。$F_Z(z)$ と $f_Z(z)$ を求めよ。
(2) X,Y が独立で $X\sim \mathrm{Ex}(\lambda_1),\ Y\sim\mathrm{Ex}(\lambda_2)$ とし $Z=X+Y,\ W=\dfrac{X}{Y}$ とおく。$f_Z(z),\ f_W(w)$ を求めよ。
(3) X,Y が独立でともに $N(0,1)$ に従うとし $S=2X+3Y,\ T=X-Y$ とおく。(S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ を求めよ。
(4) X,Y が独立で $X\sim\Gamma(\alpha_1,\beta),\ Y\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$ とし $S=X+Y,\ T=\dfrac{X}{X+Y}$ とおく。(S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ を求めよ。
(5) T が自由度 n の t 分布 ($cf.$ 定義 1.1) に従うとき、$f_T(t)$ を求めよ。

解: (1) $P(0<Z<2)=1$ より $F_Z(z)=0\ (z\leq 0),\ F_Z(z)=1\ (2\leq z)$. $0<z<2$ のとき $D: 0\leq x,y\leq 1$ とすると $F_Z(z)=\displaystyle\iint_{D\cap\{x+y\leq z\}} dxdy$ は $D\cap\{x+y\leq z\}$ の面積なので、$0<z\leq 1$ のとき $F_Z(z)=\dfrac{1}{2}z^2$, $1<z<2$ のとき $F_Z(z)=1-\dfrac{1}{2}(1-(z-1))^2=1-\dfrac{1}{2}(2-z)^2$.
よって、$f_Z(z)=0\ (z\leq 0),\ f_Z(z)=z\ (0<z\leq 1),\ f_Z(z)=2-z\ (1<z<2),\ f_Z(z)=0\ (2\leq z)$.
(2) $P(Z>0)=1$ より $f_Z(z)=0\ (z\leq 0)$. $z>0$ に対して命題 1.5 より $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2(z-t)}\,dt.$
$\lambda_1=\lambda_2$ なら $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 z}\,dt=\lambda_1^2 z e^{-\lambda_1 z}.$
$\lambda_1\neq\lambda_2$ なら $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z-(\lambda_1-\lambda_2)t}\,dt=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 z}-e^{-\lambda_1 z}).$
f_W について: $P(W>0)=1$ より $f_W(w)=0\ (w\leq 0)$. $w>0$ に対して命題 1.6 より
$f_W(w)=\displaystyle\int_0^\infty \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 tw}t\,dt=\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1+\lambda_2 w)^2}.$

(3) $s=2x+3y, t=x+y$ とすると $x=-s+3t, y=s-2t$. ゆえに $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1$ より

$g(s,t)=f_X(-s+3t)f_Y(s-2t)\Big|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\Big|=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\{(-s+3t)^2+(s-2t)^2\}}$.

(4) $P(S>0, 0<T<1)=1$ より $s>0, 0<t<1$ を除いて $g(s,t)=0$ は明らか。$s>0, 0<t<1$ のとき $s=x+y, t=\dfrac{x}{x+y}$ とすると $x=st, y=s(1-t)$. ゆえに $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{vmatrix}=-s$ より $g(s,t)=$ $f_X(st)f_Y(s(1-t))|-s|=\dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(st)^{\alpha_1-1}e^{-\beta st}\{s(1-t)\}^{\alpha_2-1}e^{-\beta s(1-t)}s=$ $\dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}s^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta s}\times\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)}t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}$. これより $S\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta), T\sim \mathrm{B{\scriptsize ETA}}(\alpha_1,\alpha_2)$.

(5) 独立な Z, Y で $Z\sim\mathrm{N}(0,1)$, $Y\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ を用いて $T=Z\Big/\sqrt{\frac{Y}{n}}$ と表せる。まず $S=Y$ として (S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ を求める。$P(S>0)=1$ より $s\leq 0$ のとき $g(s,t)=0$. $s=y, t=z\big/\sqrt{\frac{y}{n}}$ とすると $y=s,\ z=t\sqrt{\frac{s}{n}}$ より $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & \sqrt{\frac{s}{n}} \end{vmatrix}=\sqrt{\frac{s}{n}}$. $g(s,t)=f_Y(s)f_Z\Big(t\sqrt{\dfrac{s}{n}}\Big)\Big|\sqrt{\dfrac{s}{n}}\Big|=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}s^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{s}{2}}$ $\times\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2\frac{s}{n}}\sqrt{\dfrac{s}{n}}=\dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}s^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(1+\frac{t^2}{n})s}$. ゆえに $f_T(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(s,t)\,ds$

$=\dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\Big\{\dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{t^2}{n}\Big)\Big\}^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\dfrac{n+1}{2})=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(1+\dfrac{t^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}$. $\square$

問題 1.15 (1) X, Y が独立でともに $U(0,1)$ に従うとし $V=XY$ とおく。$F_V(v)$ と $f_V(v)$ を求めよ。
(2) X, Y が独立でともに $N(0,1)$ に従うとし $Z=X+Y$, $W=\dfrac{X}{Y}$ とおく。$f_Z(z)$, $f_W(w)$ を求めよ。
(3) X, Y が独立でともに $N(0,1)$ に従うとし $S=X+3Y+2$, $T=2X+Y-1$ とおく。(S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ を求めよ。また、S の周辺分布を求めよ。
(4) X, Y が独立でともに $N(0,1)$ に従うとし $S=\sqrt{X^2+Y^2}$, $T=\arctan\dfrac{X}{|Y|}$ とおく。(S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ を求め、S, T は独立であることを示し、S, T の周辺密度関数を求めよ。
ヒント: X と Y^2 が独立であり $Y^2\sim\Gamma(1/2,1/2)$ (*cf*. 注意 1.6(2)) となることを用いよ。
(5) W が自由度 (m,n) の F 分布 (*cf*. 定義 1.1) に従うとき、$f_W(w)$ を求めよ。

例 1.12 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ と n 次正定値対称行列 $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})$ に対して、n 次元確率変数 $(X_1,\ldots,X_n)$ が次の密度関数をもつとき、この分布を n 次元正規分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\Sigma})$ という:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'}. \tag{1.18}$$

ここに、$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ とし、$\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ の転置 (この場合縦ベクトル) を表す。

ここでは $n=2$ の場合を考える。この場合、$\boldsymbol{\Sigma}$ が正定値であることから、$\sigma_1,\sigma_2>0$, $|\rho|<1$ を用いて、$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ と表せる。このとき、$\det\boldsymbol{\Sigma}=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$ で $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1/\sigma_1^2 & -\rho/(\sigma_1\sigma_2) \\ -\rho/(\sigma_1\sigma_2) & 1/\sigma_2^2\end{pmatrix}$ であるから、(X,Y) の密度関数は

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big\}\Big] \tag{1.19}$$

となる。まず、X の周辺密度関数 $f_X(x)$ を求める。(1.19) の右辺の $\{\cdots\}$ の中を y について平方完成すると

$$\frac{1}{\sigma_2^2}\Big[(y-\mu_2)-\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\Big]^2+\frac{1-\rho^2}{\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 \tag{1.20}$$

となるから、$t = \dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\Big[y-\mu_2-\dfrac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\Big]$ とおくと、

$$f_X(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

となる。よって、$X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$. また、$Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ となる。　□

例題 1.13 (X,Y) の密度関数が (1.18) のとき、$S = \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}, T = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\Big(\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\Big)$ とおく ($cf.$ (1.20))。このとき、S, T は独立でともに $\mathrm{N}(0,1)$ に従うことを示せ。また、$E[X], E[Y], V(X), V(Y), \mathrm{Cov}(X,Y)$ および相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めよ。

解: $s = \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\Big(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\Big)$ とすると、

$$x = \sigma_1 s + \mu_1, \qquad y = \sigma_2\left(\rho s + \sqrt{1-\rho^2}t\right) + \mu_2 \tag{1.21}$$

より $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$. よって、(1.20) に注意注して (1.19) に代入して (S,T) の密度関数 $g(s,t)$ は

$$g(s,t) = f(\sigma_1 s + \mu_1, y = \sigma_2\left(\rho s + \sqrt{1-\rho^2}t\right) + \mu_2)|\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

よって、S, T は独立でともに $\mathrm{N}(0,1)$ に従う。更に、(1.21) と同様に

$$X = \sigma_1 S + \mu_1, \qquad Y = \sigma_2\left(\rho S + \sqrt{1-\rho^2}T\right) + \mu_2$$

と表せるので、

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[\sigma_1 S + \mu_1] = \mu_1, \qquad V(X) = E[(X-\mu_1)^2] = E[(\sigma_1 S)^2] = \sigma_1^2, \\
E[Y] &= E[\sigma_2\left(\rho S + \sqrt{1-\rho^2}T\right) + \mu_2] = \mu_2, \\
V(X) &= E[(Y-\mu_2)^2] = E[\sigma_2^2\left(\rho S + \sqrt{1-\rho^2}T\right)^2] \\
&= \sigma_2^2\left\{\rho^2 E[S^2] + 2\rho\sqrt{1-\rho^2}E[ST] + (1-\rho^2)E[T^2]\right\} = \sigma_2^2 \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)] = E[\sigma_1\sigma_2 S\left(\rho S + \sqrt{1-\rho^2}T\right)] = \sigma_1\sigma_2\rho, \\
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1\sigma_2} = \rho. \qquad \square
\end{aligned}$$

問題 1.16 (X,Y) の同時密度関数が $f(x,y) = c\exp\Big\{-\dfrac{1}{2}Q(x,y)\Big\}$, ただし $Q(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2y$ で与えられるとき、$Q(x,y)$ をまず x について平方完成することで、(y と x を入れ替えた意味で) 例題 1.13 と同様に X, Y の一次関数 S と Y の一次関数 T を定めることで、定数 c を定め、$E[X], E[Y], V(X), V(Y), \mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ。

1.5　条件つき確率分布

ここでは、2 次元確率変数 (X,Y) に対して条件つき分布 $P(Y \le y|X=x)$ を X の周辺分布は離散型か密度関数をもつ場合のみに定義する。X や Y が 1 次元でない場合でも X の周辺分布が離散型や連続型の同様に定義できる。

(i) X の周辺分布が離散型の場合
$P(X=x)>0$ なる x に対して、$P(Y \leq y|X=x)=\dfrac{P(X=x,Y\leq y)}{P(X=x)}$ と定め、これを $X=x$ の条件下での Y の条件付き確率分布という。一方、$P(X=x)=0$ となる x では定義しないものとする。

(ii) X の周辺分布が密度関数をもつ場合 (この場合 $P(X=x)=0$ $(\forall x)$ であるから工夫が必要となる。)
x を $f_X(x)$ の連続点で $f_X(x)>0$ となる点とする。ただし、$f_X(x)$ は X の周辺密度関数とする。$P(Y\leq y|X=x)$ を次のように定義する。

$$P(Y\leq y|X=x)=\lim_{\delta\to+0}P(Y\leq y|x\leq X<x+\delta)=\lim_{\delta\to+0}\frac{P(x\leq X<x+\delta,Y\leq y)}{P(x\leq X<x+\delta)}$$

と定める。このとき、

$$\int_a^b P(Y\leq y|X=x)f_X(x)\,dx=P(Y\leq y,a\leq X<b) \tag{1.22}$$

となることに注意する。特に、(X,Y) が同時密度関数 $f(x,y)$ をもてば、

$$P(Y\leq y|x\leq X<x+\delta)=\frac{P(Y\leq y,x\leq X<x+\delta)}{P(x\leq X<x+\delta)}=\frac{\int_x^{x+\delta}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,dtds}{\int_x^{x+\delta}f_X(s)ds}$$

ここで、分母分子を δ で割り $\delta\to+0$ とすることで、微分積分学の基本定理により

$$P(Y\leq y|X=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y}f(x,t)\,dt}{f_X(x)}$$

を得る。これより、条件 $X=x$ の下での Y の分布は連続型で、その密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ が

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.23}$$

となることがわかった。$f_{Y|X}(y|x)$ を条件 $X=x$ の下での Y の条件つき密度関数という。 □

例 1.14 (X,Y) が 2 次元正規分布 $\mathrm{N}\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$ に従う、すなわち、密度関数が (1.19) で与えられるとき、$f_{Y|X}(y|x)$ を求め、$X=x$ の条件下の Y の分布を求めよ。

解: 例 1.12 より $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ であるから (1.19), (1.20) より

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big[-\frac{(y-\{\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\})^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\Big]$$

を得る。これは、$X=x$ の条件下の Y の分布が正規分布 $\mathrm{N}\Big(\mu_2+\dfrac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\Big)$ となることを示している。 □

$P(Y\leq y|X=x)$ がすべての y で定義されていれば、条件付き期待値 $E[h(Y)|X=x]$ が定義できる。例えば (X,Y) が連続型であれば

$$E[h(Y)|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)f_{Y|X}(y|x)\,dx$$

と定義される。さらに、条件つき分散を $V(Y|X=x)=E[(Y-E[Y|X=x])^2|X=x]=E[Y^2|X=x]-(E[Y|X=x])^2$ で定める。また、$E[h(Y)|X=x]$ は x の関数であるがそれを $\psi(x)$ で表すとき $\psi(X)$ は確率変数であるがこれを単に $E[h(Y)|X]$ と表す。同様に $V(Y|X)$ も定義される。

例題 1.15 (1) (X,Y) の密度関数が $f(x,y)=4e^{-2x-y}$ $(0\le 2x\le y)$, $f(x,y)=0$ (その他) とする。$x>0$ のとき (a) $f_{Y|X}(y|x)$, (b) $E[Y|X]$ を求めよ。
(2) $Z\sim \mathrm{Pa}(\alpha,1)$ とし、$Z=z$ の条件の下 X,Y は独立でともに一様分布 $\mathrm{U}(0,z)$ に従うとする。ただし、$\mathrm{Pa}(\alpha,c)$ はパレート分布を表す: $Z\sim\mathrm{Pa}(\alpha,c)$ $(\alpha,c>0)$ とはその密度関数が $f(z)=\alpha c^{\alpha}z^{-(\alpha+1)}$ $(z\ge c)$, $f(z)=0$ (その他) と定める。このとき次を求めよ。
(a) $x>0$ に対し $f_{(Y,Z)|X}(y,z|x)$, (b) $x>1$ に対し $E[\max\{X,Y\}|X=x]$

解: (1) (a) $f_X(x)=\displaystyle\int_{2x}^{\infty}4e^{-2x-y}\,dy=4e^{-4x}$ より、$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{4e^{-2x-y}}{4e^{-4x}}=e^{2x-y}$ $(y\ge 2x)$, $f_{Y|X}(y|x)=0$ (その他).
(b) $E[Y|X=x]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}yf_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_{2x}^{\infty}ye^{2x-y}\,dy=2x+1$. ゆえに $E[Y|X]=2X+1$.
(2) (X,Y,Z) の同時密度関数は $f(x,y,z)=f_{(X,Y)|Z}(x,y)f_Z(z)=z^{-1}z^{-1}\alpha z^{-(\alpha+1)}=\alpha z^{-(\alpha+3)}$ $(0\le x,y\le z$ かつ $z\ge 1)$, $f(x,y,z)=0$ (その他). よって、

$$f_X(x)=\int_{\max\{x,1\}}^{\infty}dz\int_0^z\alpha z^{-(\alpha+3)}\,dy=\int_{\max\{x,1\}}^{\infty}\alpha z^{-(\alpha+2)}\,dz=\frac{\alpha}{\alpha+1}(\max\{x,1\})^{-(\alpha+1)}.$$

よって、$0<x\le 1$ のとき

$$f_{(Y,Z)|X}(y,z|x)=\frac{\alpha z^{-(\alpha+3)}}{\alpha/(\alpha+1)}=(\alpha+1)z^{-(\alpha+3)}\quad(0\le y\le z \text{ かつ } z\ge 1),\qquad =0\quad(\text{その他}),$$

$x>1$ のとき $\quad f_{(Y,Z)|X}(y,z|x)=(\alpha+1)z^{-(\alpha+3)}x^{\alpha+1}\quad(0\le y\le z$ かつ $z\ge x),\qquad =0\quad$(その他).

$$\begin{aligned}
E[\max\{X,Y\}|X=x]&=\int_x^{\infty}dz\int_0^z\max\{x,y\}(\alpha+1)z^{-(\alpha+3)}x^{\alpha+1}\,dy\\
&=\int_x^{\infty}\Big\{\int_0^x x(\alpha+1)z^{-(\alpha+3)}x^{\alpha+1}\,dy+\int_x^z y(\alpha+1)z^{-(\alpha+3)}x^{\alpha+1}\,dy\Big\}\,dz\\
&=\int_x^{\infty}\Big\{\frac12(\alpha+1)z^{-(\alpha+3)}x^{\alpha+3}+\frac12(\alpha+1)z^{-(\alpha+1)}x^{\alpha+1}\Big\}\,dz\\
&=\frac12\Big[-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}z^{-(\alpha+2)}x^{\alpha+3}-\frac{\alpha+1}{\alpha}z^{-\alpha}x^{\alpha+1}\Big]_x^{\infty}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha+2)}x.\qquad\square
\end{aligned}$$

問題 1.17 (1) (X,Y) の同時密度関数が $f(x,y)=8xy$ $(0\le y\le x\le 1)$, $f(x,y)=0$ (その他) とする (*cf*. 例題 1.10)。$0<x<1$ のとき (a) $f_{Y|X}(y|x)$, (b) $E[Y|X=x]$ (c) $V(Y|X=x)$ を求めよ。
(2) (X,Y) の同時密度関数が $f(x,y)=2xye^{-x(1+y^2)}$ $(x,y\ge 0)$, $f(x,y)=0$ (その他) とするとき
(a) $f_{Y|X}(y|x)$ $(x>0)$, $E[Y|X]$, $E[Y^2|X]$, (b) $f_{X|Y}(x|y)$ $(y>0)$, $E[X|Y]$, $V(X|Y)$ を求めよ。
(3) X は $\mathrm{Ex}(1)$ に従い、$X=x$ の下で $Y\sim\mathrm{Ex}(x)$ とするとき、以下を求めよ。
(a) (X,Y) の同時密度関数 $f(x,y)$, (b) $f_Y(y)$, (c) $f_{X|Y}(x|y)$ $(y>0)$, (d) $E[X|Y]$, (e) $V(X|Y)$
(4) $X\sim\mathrm{B{\scriptsize ETA}}(a,b)$ で $X=x$ の下 $Y\sim\mathrm{B}(n,x)$ (二項分布) に従うとするとき、以下を求めよ。
(a) $P(Y=k)$, $k=0,1,\ldots,n$ (b) $Y=k$ の下での X の条件つき密度関数 $f_{X|Y}(x|k)$

定理 1.7 条件つき期待値について以下が成立する。
(1) $E[E[Y|X]]=E[Y]$.
(2) $E[aY+bZ|X]=aE[Y|X]+bE[Z|X]$. ($a,b$ は定数。)
(3) $E[g(X)h(Y)|X]=g(X)E[h(Y)|X]$, 特に $E[g(X)|X]=g(X)$.
(4) X,Y が独立なら $E[Y|X]=E[Y]$.
(5) $E[E[Z|X,Y]|X]=E[Z|X]$.

(6) $E[(Y-g(X))^2]$ を最小にするのは $g(X)=E[Y|X]$ である。これは確率変数からなるベクトル空間に $\langle X,Y\rangle = E[XY]$ で内積を定義するとき、Y から X への正射影が $E[Y|X]$ であることを表している。
(7) $V(Y)=E[V(Y|X)]+V(E[Y|X])$.
ただし、 (3) で g,h は "よい" 関数とし、厳密には (2)–(6) については "a.s." として成立する。

証明: (1)–(5) には測度論的確率論の知識を必要とする。(1) について (X,Y) が連続型であれば (1.23) を用いて

$$\begin{aligned}E[E[Y|X]] &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dt\Big) f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_X(x)} f_X(x)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,dxdy = E[Y]\end{aligned}$$

と証明できる。(6) について $E[X|Y]$ は Y の関数だから、

$$\begin{aligned}&E[(X-E[X|Y])h(Y)] \overset{(1)}{=} E\big[E[(X-E[X|Y])h(Y)|Y]\big] \overset{(3)}{=} E\big[E[X-E[X|Y]|Y]h(Y)\big] \\ &\overset{(2)}{=} E[(E[X|Y]-E[E[X|Y]|Y])h(Y)] \overset{(3)}{=} E[(E[X|Y]-E[X|Y])h(Y)] = 0\end{aligned}$$

となることに注意すると、$h(Y)=E[X|Y]-g(Y)$ とみなして

$$\begin{aligned}&E\ [(X-g(Y))^2] = E[(X-E[X|Y]+E[X|Y]-g(Y))^2] \\ &= E[(X-E[X|Y])^2] + 2E[(X-E[X|Y])(E[X|Y]-g(Y))] + E[(E[X|Y]-g(Y))^2] \\ &= E[(X-E[X|Y])^2] + E[(E[X|Y]-g(Y))^2].\end{aligned}$$

$E[(Y-g(X))^2]$ を最小にするのは $g(X)=E[Y|X]$ である。(7) について:

$$\begin{aligned}E[V(Y|X)]+V(E[Y|X]) &= E[E[Y^2|X]-(E[Y|X])^2] + E[(E[Y|X])^2] - (E[E[Y|X]])^2 \\ &= E[E[Y^2|X]] - (E[E[Y|X]])^2 \overset{(1)}{=} E[Y^2]-(E[Y])^2 = V(Y) \qquad \square\end{aligned}$$

1.6 極限定理

命題 1.8 (チェビシェフの不等式) (あるいはマルコフの不等式) $X\geq 0$, $c>0$ に対して $P(X\geq c)\leq \frac{1}{c}E[X]$.

証明: $A=\{X\geq c\}$ とし 1_A を $1_A(\omega)=1\ (\omega\in A),\ =0\ (\omega\notin A)$, を満たす確率変数とすると、$1_A\leq \frac{1}{c}X$. よって、$P(A)=E[1_A]\leq \frac{1}{c}E[X]$. $\square$

定理 1.9 (大数の弱法則) $X_1, X_2, \ldots$ が独立で同じ分布に従う (i.i.d. と略す) とき、$E[X_1]=m$, $V(X_1)=\sigma^2<\infty$ であれば、任意の $\delta>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\Big| \geq \delta\right) = 0.$$

証明: チェビシェフの不等式と $E\big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\big]=m$, (1.8) により

$$\begin{aligned}&P\left(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\Big| \geq \delta\right) = P\left(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\Big|^2 \geq \delta^2\right) \leq \frac{1}{\delta^2}E\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\Big|^2\Big] \\ &= \frac{1}{\delta^2}V\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2\delta^2}V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n\delta^2}\sigma^2 \to 0. \qquad \square\end{aligned}$$

注意 1.7 大数の弱法則は $X_1, X_2, \ldots$ が i.i.d. であれば $E[|X_1|] < \infty$ ならば成立する。この条件下では次の**大数の強法則**も成立する:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = m\right) = 1.$$

大数の弱法則の収束を**確率収束**, 大数の強法則の収束を**概収束**という。これらの大数の法則の詳しい成立条件、および次の中心極限定理の証明は確率統計学 II で扱う。

定理 1.10 (中心極限定理) $X_1, X_2, \ldots$ が i.i.d. で、$E[X_1] = m$, $V(X_1) = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$ とする。このとき $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に法則収束する。すなわち、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq U_n \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy, \qquad -\infty < a < b < \infty.$$

注意 1.8 中心極限定理を読み替えると、
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が i.i.d. で、$E[X_1] = \mu$, $V(X_1) = \sigma^2$ であれば (統計では母平均 μ, 母分散 σ^2 の母集団からの無作為標本という)、n が十分大きいとき標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は近似的に正規分布 $\mathrm{N}\Big(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\Big)$ に従う。
となる。この定理が大標本の場合の母平均に関する区間推定や検定、および二項母集団で大標本の場合の母比率に関する区間推定や検定に応用されることは「統計と社会」で学んだ。

2 統計

統計解析の目的は、母集団から抽出された標本からその母集団の特性を推測することである。統計量はこの目的に関して標本のもつ情報を縮約していると考えればよく、例えば、標本平均や不偏分散などが情報量の例である。(参考文献: 浅野長一郎 江島伸興 李賢平 共著 基本統計学 森北出版, 1993. 黒田耕嗣 著 生保年金数理 培風館, 2007. 国沢清典編 確率統計演習 2 統計 培風館, 1966.)

2.1 点推定

人の身長や体重に関しては母集団分布 (population distribution) として、通常、正規分布が仮定される。正規分布は平均 μ, 分散 σ^2 の値が与えられるとその分布は完全に決定される。このような実数を母数、またはパラメータ (parameter) という。特に、母数が未知の場合、母数は未知母数 (unknown parameter) とよばれる。母集団の母数を推定することが統計解析における目的の一つであり、この推定が母集団から推定された標本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をもとにして行う。

この標本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ はこの母集団分布に従う独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の実現値とみなす。この $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をこの母集団からの無作為標本という。(すなわち、$X_1, X_2, \ldots, X_n$ がある母集団からの無作為標本なら、i.i.d. となっている。) 未知母数を推定するための無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の関数 $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を統計量という。

定義 2.1 (1) 統計量 $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が母数 θ の**不偏推定量** (unbiased estimator) であるとは $E[T(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta$ が成り立つことである。
(2) 統計量 $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が母数 θ の**一致推定量** (consistent estimator) であるとは、$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|T(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta| \geq \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つときにいう。

例 2.1 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ は母平均 μ の不偏推定量であり、また一致推定量でもある。実際、$E[\overline{X}] = \mu$ より不偏推定量である。また、大数の弱法則 (定理 1.9) より一致推定量であることもわかる。

問題 2.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を無作為標本で $E[X_1^4] < \infty$ とし $U^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ とおく。

(1) U^2 が母分散 σ^2 の不偏推定量であることを示せ。これより U^2 を不偏分散という。

(2) $E[(U^2 - \sigma^2)^2] = \dfrac{1}{n}E[(X_1 - \mu)^4] - \dfrac{n-3}{n(n-1)}(\sigma^2)^2$, ただし $\mu = E[X_1]$ を示し、U^2 が一致推定量でもあることを (大数の弱法則の証明と同様にして) 示せ。

ヒント: $Y_i = X_i - \mu$ とし、$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ と変形して計算すると少し容易になります。

定義 2.2 統計量 $T_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), T_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が母数 θ の不偏推定量であるとする。このとき、$V(T_1) < V(T_2)$ が成り立つといい、T_1 が T_2 より**有効**であるという。特に、不偏推定量の中で分散が最小となるものを**有効推定量**という。

例題 2.2 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を i.i.d. で一様分布 $\mathrm{U}(0, \theta)$ に従っており、θ が未知母数とする。このとき、

$$T_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n), \qquad T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n+1}{n}\max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

がともに θ の不偏推定量となることを示せ。また、T_1, T_2 のどちらが有効であるか調べよ。

解: $E[T_1] = \dfrac{2}{n}(E[X_1] + \cdots + E[X_n]) = \dfrac{2}{n} \cdot n\dfrac{\theta}{2} = \theta$. 一方、$Y = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とすると、

$$P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y, \cdots, X_n \leq y) = P(X_1 \leq y) \cdots P(X_n \leq y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \quad (0 < y < \theta)$$

より、$f_Y(y) = \dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}$ $(0 < y < \theta), = 0$ (その他). 従って、

$$E[T_2] = \frac{n+1}{n}\int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\,dy = \frac{n+1}{n}n\frac{1}{n+1}\theta = \theta.$$

以上より、T_1, T_2 ともに不偏推定量である。

次に、$V(T_1) = \dfrac{4}{n^2}(V(X_1) + \cdots + V(X_n)) = \dfrac{4}{n^2} \cdot n\left(\dfrac{\theta^2}{3} - \dfrac{\theta^2}{2^2}\right) = \dfrac{\theta^2}{3n}$.

一方、$E[Y^2] = \displaystyle\int_0^\theta y^2\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\,dy = \frac{n}{n+2}\theta^2$ より

$$V(T_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 E[Y^2] - (E[T_2])^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n}{n+2}\theta^2 - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

よって、$n \leq 2$ のとき $V(T_1) < V(T_2)$ すなわち T_1 は T_2 より有効となる。($n = 1$ のとき $T_1 = T_2$.) □

定理 2.1 (Cramér-Rao) $X_1, \ldots, X_n$ が i.i.d. で、θ が未知母数とし、その密度関数を $f(x|\theta)$ または確率関数を $p(x|\theta) = P(X = x)$ とする。このとき $T(X_1, \ldots, X_n)$ が母数 θ の不偏推定量であれば、適切な条件下で

$$V(T) \geq \frac{1}{nI(\theta)} \tag{2.1}$$

である。ここで、$I(\theta)$ は Fisher 情報量とよばれ次で定義される。

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] \quad \text{(密度関数があるとき)} \qquad = E\left[\left(\frac{\partial \log p(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] \quad \text{(離散型のとき)}$$

証明: 密度関数を持つときのみ示す。密度関数であることと、T が不偏推定量であるから、

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} T\prod_{j=1}^{n} f(x_j|\theta)\,dx_1\cdots dx_n, \qquad 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} f(x_j|\theta)\,dx_1\cdots dx_n$$

が成立する。上の二式を θ に関する微分が積分の記号内で行えるとし、この両辺を θ で微分し、

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} T\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(x_j|\theta)\Big\}\,dx_1\cdots dx_n, \qquad 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(x_j|\theta)\Big\}\,dx_1\cdots dx_n$$

を得る。これから $\dfrac{\partial}{\partial\theta}g(\theta) = \Big(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log g(\theta)\Big)g(\theta)$ に注意して

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(T-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(x_j|\theta)\Big\}\prod_{j=1}^{n} f(x_j|\theta)\,dx_1\cdots dx_n \\ &= E\Big[(T-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(X_j|\theta)\Big\}\Big]. \end{aligned}$$

ここで Cauchy-Shwarz の不等式 $((E[XY])^2 \le E[X^2]E[Y^2])$ を用いて

$$\left|E\Big[(T-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(X_j|\theta)\Big\}\Big]\right|^2 \le E\left[(T-\theta)^2\right]E\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(X_j|\theta)\Big\}\Big)^2\Big]. \tag{2.2}$$

ここで $Y_i = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_i|\theta)$ とすると、$I(\theta) = E[Y_i^2]$ で

$$E[Y_i] = \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x|\theta)\Big\}f(x|\theta)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x|\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(x|\theta)\,dx\Big) = 0.$$

$Y_1,\dots,Y_n$ は独立であるから

$$E\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(X_j|\theta)\Big\}\Big)^2\Big] = E[(Y_1+\cdots+Y_n)^2] = \sum_{i=1}^{n}E[Y_i^2] + 2\sum_{1\le i<j\le n}E[Y_iY_j] = nI(\theta)$$

となり、$V(T) = E[(T-\theta)^2]$ に注意して与式を得る。 □

注意 2.1 (2.1) で等号成立はある定数 c に対して

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Big\{\prod_{j=1}^{n} f(X_j|\theta)\Big\} = c(T-\theta) \qquad \text{a.e.}$$

が成立するときである。これは (2.2) で用いた Cauchy-Shwarz の不等式における等号成立の条件による。

例 2.3 正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ からの無作為標本 $X_1,\dots,X_n$ とする。このとき、例 2.1 より標本平均 $\overline{X}$ は μ の不偏推定量であるが、これは有効推定量にもなっている。ただし、σ^2 は既知とする。

証明: $V(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}\sigma^2$. 一方、$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ の密度関数 $f(x|\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}$ に対して、Fisher 情報量は

$$I(\mu) = E\Big[\Big(\frac{\partial\log f(X|\mu)}{\partial\mu}\Big)^2\Big] = E\Big[\Big(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\Big)^2\Big] = \frac{1}{\sigma^2}$$

であるから、Cramér-Rao の不等式の等号が成立する。よって、$\overline{X}$ は有効推定量である。 □

問題 2.2 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を i.i.d. で指数分布 Ex$(1/\lambda)$ に従っており、母平均 λ の不偏推定量 $\overline{X}$ と $T = c\min\{X_1, \cdots, X_n\}$ を考える。

(1) 定数 c を定めよ。 (2) $\overline{X}$ と T のどちらが有効か調べよ。 (3) $\overline{X}$ が有効推定量であることを示せ。

定義 2.3 未知母数 θ の母集団からの標本 $X_1, \ldots, X_n$ に対し、その密度関数を $f(x_1, \cdots, x_n|\theta)$ または確率関数を $p(x_1, \cdots, x_n|\theta) = P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)$ とする。このとき標本 $X_1, \ldots, X_n$ が与えられた条件下での θ の**尤度関数** (likelihood function) を次で定義する。

$$L(\theta) = f(x_1, \cdots, x_n|\theta) \quad (\text{密度関数があるとき}) \qquad = p(x_1, \cdots, x_n|\theta) \quad (\text{離散型のとき})$$

また、尤度関数 $L(\theta)$ を最大にする $\theta = \widehat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ が存在するとき、すなわち、

$$L(\widehat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)) = \max_{\theta} L(\theta)$$

のとき $\widehat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ を θ の**最尤推定量** (maximum likelihood estimator) という。

例題 2.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が Bernoulli 試行の結果で、$P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$ とする。p の最尤推定量を求めよ。

解: p の尤度関数は

$$L(p) = P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = p^{x_1 + \cdots + x_n}(1-p)^{n-(x_1+\cdots+x_n)}.$$

$\overline{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ と表し、$L(p)$ の対数をとって微分すると

$$\frac{\partial}{\partial p}\log L(p) = \frac{\partial}{\partial p}\Big\{n\overline{x}\log p + n(1-\overline{x})\log(1-p)\Big\} = \frac{n\overline{x}}{p} - \frac{n(1-\overline{x})}{1-p} = \frac{n(\overline{x}-p)}{p(1-p)}.$$

従って、$\dfrac{\partial}{\partial p}\log L(p) = 0$ を解いて $p = \overline{x}$. このとき、$L(p)$ は最大となるので、

$$\widehat{p} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

が p の最尤推定量となる。 □

例題 2.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が正規母集団 N(μ, σ^2) からの無作為標本のとき、母平均 μ と母分散 σ^2 の最尤推定量を求めよ。

解: 尤度関数は

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{n/2}\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}.$$

対数をとると $\log L(\mu, \sigma^2) = \dfrac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$ より

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\log L(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\log L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2}.$$

従って、$\dfrac{\partial}{\partial \mu}\log L(\mu, \sigma^2) = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial \sigma^2}\log L(\mu, \sigma^2) = 0$ を解いて $\mu = \overline{x} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, $\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.
このとき、$L(\mu, \sigma^2)$ は最大となるので、

$$\widehat{\mu} = \overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \qquad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

が μ, σ^2 の最尤推定量となる。 □

問題 2.3 (1) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を i.i.d. で Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする。このとき、λ の最尤推定量を求めよ。また、それが有効推定量となることを示せ。
(2) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を i.i.d. でガンマ分布 $\Gamma(\alpha, 1/\beta)$ に従うとする。ここで、α は既知で β は未知パラメーターとする。このとき、β の最尤推定量を求めよ。

例題 2.6 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が i.i.d. で、一様分布 $\mathrm{U}(0, \theta)$ に従うとき、未知母数 θ の最尤推定量を求めよ。

解: サンプルの実現値 $x_1, \ldots, x_n$ が与えられたとき、尤度関数 $L(\theta)$ は $0 \leq x_1 \leq \theta, \ \cdots, \ 0 \leq x_x \leq \theta$ でなければ $L(\theta) = 0$ となる。よって、$x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ のとき

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \quad (\max\{x_1, \cdots, x_n\} \leq \theta \text{のとき}) \qquad = 0 \quad (\text{その他})$$

となる。従って、$\theta = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$ のとき、$L(\theta)$ は最大値をとる。これより

$$\widehat{\theta} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

が θ の最尤推定量となる。 □

2.2 区間推定

本節では、未知母数 θ を点で推定するのではなく、θ が含まれる区間 $(\hat{\theta}_L(X_1, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, \ldots, X_n))$ を

$$P\big(\hat{\theta}_L(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_U(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1 - \varepsilon \tag{2.3}$$

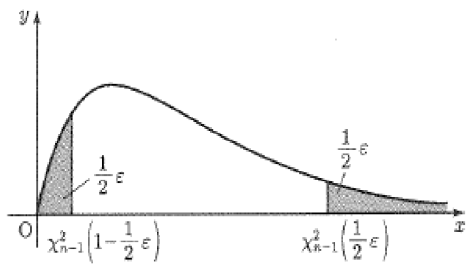
となるように定める**区間推定法**を考える。この区間 $(\hat{\theta}_L(X_1, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, \ldots, X_n))$ を θ の信頼係数 $1 - \varepsilon$ の**信頼区間**という。また、この ε を危険率と呼ぶ。

統計と社会で、正規母集団の平均 μ の区間推定 (σ^2 が既知のとき) とサインプル数が大きいときの二項母集団の母比率 p の区間推定を学んだ。また、確率統計学 I では「正規母集団における標本平均・不偏分散とその関数の分布」の節で、正規母集団の母分散 σ^2 の区間推定と平均 μ の区間推定 (σ^2 が未知のとき) を学ぶ。この節ではその他の区間推定法を考察する[*1]。

<u>指数分布に従う母集団の母平均の区間推定</u>

命題 2.2 $X_1, \ldots, X_n$ は i.i.d. で $\mathrm{Ex}(1/\lambda)$ に従うとき、$\dfrac{2}{\lambda}(X_1 + \cdots + X_n)$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布に従う。

証明: $X \sim \mathrm{Ex}(1/\lambda)$ のとき密度関数を計算することにより $\dfrac{2}{\lambda}X \sim \mathrm{Ex}(1/2)$ となる。よって、$\mathrm{Ex}(1/2)$ は $\Gamma(1, 1/2)$ であるから例題 1.11(2),(4) と同様に $\dfrac{2}{\lambda}(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma(n, 1/2)$ を得るが、$\Gamma(n, 1/2)$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布に他ならない。 □



この命題より $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とすると、

$$P\Big(\chi^2_{2n}\big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\big) \leq \frac{2}{\lambda}S_n \leq \chi^2_{2n}\big(\frac{1}{2}\varepsilon\big)\Big) = 1 - \varepsilon$$

となるから、括弧内の不等式を λ について解くと

$$\frac{2S_n}{\chi^2_{2n}(\frac{1}{2}\varepsilon)} \leq \lambda \leq \frac{2S_n}{\chi^2_{2n}(1 - \frac{1}{2}\varepsilon)}$$

[*1] 信頼区間の一般的な作り方は「国沢編 確率統計演習 2 統計 培風館」p.81– を参照のこと。

となる。ここで、$\chi^2_{2n}(\frac{1}{2}\varepsilon)$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布の上側 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 点で $\chi^2_{2n}(1-\frac{1}{2}\varepsilon)$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布の下側 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 点 (図を参照のこと、ただし図は、『黒田耕嗣 著 生保年金数理 培風館, 2007』より)。従って、平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間は $\left(\dfrac{2s}{\chi^2_{2n}(\frac{1}{2}\varepsilon)}, \dfrac{2s}{\chi^2_{2n}(1-\frac{1}{2}\varepsilon)}\right)$ となる。ただし、s は $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ の実現値。

例題 2.7 ある電気部品の寿命を調べたところ、次の通りであった。平均寿命を信頼係数 0.95 で区間推定せよ。ただし、寿命分布として指数分布を仮定せよ。

$$732,\ \ 838,\ \ 915,\ \ 1211,\ \ 1355,\ \ 1420,\ \ 1638\ \ (\text{単位 時間})$$

解: $s = 732 + 838 + \cdots + 1638 = 8109$, $n = 7$ で

$$\frac{2s}{\chi^2_{2n}(0.025)} = \frac{2\cdot 8109}{26.12} = 620.903\cdots, \qquad \frac{2s}{\chi^2_{2n}(0.975)} = \frac{2\cdot 8109}{5.629} = 2881.151\cdots$$

より 95% 信頼区間は $(620.9, 2881.2)$. □

<u>Poisson 分布に従う母集団の母平均の区間推定</u> (精密法)

命題 2.3 $k \geq 1$ に対して、$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $Y_1 \sim \chi^2_{2k}$, $Y_2 \sim \chi^2_{2(k+1)}$ とすると、次が成立する。
(a) $P(X \geq k) = P(Y_1 \leq 2\lambda)$, (b) $P(X \leq k) = P(Y_2 > 2\lambda)$.

証明: (a) のため $\varphi_k(\lambda) = P(X \geq k)$ とすると

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi_k(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \sum_{i=k}^{\infty}\Big\{\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\Big\} = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}.$$

よて $\varphi_k(0) = 0$ より

$$\varphi_k(\lambda) = \int_0^{\lambda}\frac{y^{k-1}}{(k-1)!}e^{-y}\,dy = \int_0^{2\lambda}\frac{x^{k-1}}{2^k\Gamma(k)}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = P(Y_1 \leq 2\lambda),$$

ここで二つ目の等号は $y = x/2$ とおいた。一方、

$$P(X \leq k) = 1 - P(X \geq k+1) = 1 - P(Y_2 \leq 2\lambda) = P(Y_2 > 2\lambda). \qquad \square$$

$X_1, \ldots, X_n$ は i.i.d. で $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとすれば、問題 1.8(6) より $S_n := X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Po}(n\lambda)$ となる。S_n の実現値を s とすると、命題 2.3(b) より $Z_1 \sim \chi^2_{2(s+1)}$ に対し、

$$P(S_n \leq s) = P(Z_1 > 2n\lambda) \geq \frac{1}{2}\varepsilon$$

となるので、$2n\lambda \leq \chi^2_{2(s+1)}(\frac{1}{2}\varepsilon)$. また、命題 2.3(a) より $Z_1 \sim \chi^2_{2s}$ に対し、

$$P(S_n \geq s) = P(Z_2 \leq 2n\lambda) \leq 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$$

となるので、$2n\lambda \leq \chi^2_{2s}(1-\frac{1}{2}\varepsilon)$. 従って、$\lambda$ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間は、s を S_n の実現値とするとき、$\left(\dfrac{1}{2n}\chi^2_{2s}(1-\frac{1}{2}\varepsilon), \dfrac{1}{2n}\chi^2_{2(s+1)}(\frac{1}{2}\varepsilon)\right)$ となる。

注意 2.2 n が十分大きいときは中心極限定理を用いて正規母集団の場合に帰着して区間推定することが多い。二項母集団についても同様である。

例題 2.8 ある市において交通事故の発生件数を調べたところ、次の通りであった。1 日の平均発生件数を信頼係数 0.95 で区間推定せよ。ただし、事故件数は Poisson 分布に従って発生することがわかっているとする。

$$3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 5,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1\ \ (\text{単位 件数/日})$$

また、中心極限定理により正規分布に近似されるとして、信頼係数 0.95 で区間推定せよ。

解: (精密法) $s = 3 + 0 + \cdots + 1 = 16$, $n = 10$ で

$$\frac{1}{2n}\chi^2_{2\cdot 16}(0.975) = \frac{18.29}{20} = 0.9145, \qquad \frac{1}{2n}\chi^2_{2(16+1)}(0.025) = \frac{51.97}{20} = 2.5985$$

より 95% 信頼区間は $(0.9145, 2.5985)$.
(近似法) 標本平均は $\overline{x} = 1.6$ で Poisson 分布では平均 = 分散であることに注意すると、

$$\overline{x} \pm u(0.025)\sqrt{\frac{\overline{x}}{10}} = 1.6 \pm 1.960\sqrt{\frac{1.6}{10}} = \begin{cases} 2.384 \\ 0.816 \end{cases}$$

より求める信頼区間は $(0.816, 2.384)$. □

<u>二項母集団の母比率の区間推定</u> (精密法)

補題 2.4 $W \sim F^m_n$ のとき $V = \dfrac{W}{W + \frac{n}{m}}$ とすると、$V \sim \mathrm{B{\scriptstyle ETA}}(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$. 特に、$P(V \geq x) = P\Big(W \geq \dfrac{n}{m}\dfrac{x}{1-x}\Big)$, $0 < x < 1$.

証明: F 分布の定義より独立な $X \sim \chi^2_m$ と $Y \sim \chi^2_n$ を用いて、$W = \frac{X}{m}\Big/\frac{Y}{n}$ と表せる。よって、

$$V = \frac{W}{W + \frac{n}{m}} = \frac{\frac{X}{m}\Big/\frac{Y}{n}}{\frac{X}{m}\Big/\frac{Y}{n} + \frac{n}{m}} = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{X}{m} + \frac{n}{m}\frac{Y}{n}} = \frac{X}{X+Y}$$

となるが、自由度 n の χ^2 分布はガンマ分布 $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ であるから、例題 1.11(4) より主張を得る。 □

命題 2.5 $1 \leq k \leq n-1$ に対して、$X \sim \mathrm{B}(n,p)$, $W_1 \sim F^{2(n-k+1)}_{2k}$, $W_2 \sim F^{2(k+1)}_{2(n-k)}$ とすると、次が成立する。

(a) $P(X \geq k) = P\Big(W_1 \geq \dfrac{k(1-p)}{(n-k+1)p}\Big)$, (b) $P(X \leq k) = P\Big(W_2 \geq \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}\Big)$.

証明: (a) のため $\varphi_k(p) = P(X \geq k)$ とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\varphi_k(p) &= \frac{d}{dp}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=k}^{n}\Big\{\frac{n!}{i!(n-i)!}ip^{i-1}(1-p)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)p^i(1-p)^{n-i-1}\Big\} \\
&= \sum_{i=k}^{n-1}\Big\{\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}p^{i-1}(1-p)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!}p^i(1-p)^{n-1-i}\Big\} + np^{n-1} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \frac{1}{\mathrm{B}(k, n-k+1)}p^{k-1}(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

よって $\varphi_k(0) = 0$ より

$$\varphi_k(p) = \int_0^p \frac{1}{\mathrm{B}(k,n-k+1)}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx = \int_{1-p}^1 \frac{1}{\mathrm{B}(k,n-k+1)}y^{n-k}(1-y)^{k-1}\,dy \qquad (2.4)$$

ここで二つ目の等号は $y = 1-x$ とした。右辺は $V_1 \sim \mathrm{B{\scriptstyle ETA}}(n-k+1, k)$ とすると $P(V_1 \geq 1-p)$ より補題 2.4 から

$$P(X \geq k) = P(V_1 \geq 1-p) = P\Big(W_1 \geq \frac{k}{n-k+1}\frac{1-p}{p}\Big).$$

一方、(b) について (2.4) の最初の等号を k を $k+1$ として用いると

$$P(X \le k) = 1 - P(X \ge k+1) = 1 - \int_0^p \frac{1}{\mathrm{B}(k+1, n-k)} x^k (1-x)^{n-k-1}\,dx$$
$$= \int_p^1 \frac{1}{\mathrm{B}(k+1, n-k)} x^k (1-x)^{n-k-1}\,dx$$

2 行目の積分は $V_2 \sim \textsc{Beta}(k+1, n-k)$ とすると $P(V_2 \ge p)$ と表せるから、再び補題 2.4 より

$$P(X \le k) = P(V_2 \ge p) = P\Big(W_2 \ge \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}\Big). \qquad \square$$

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Be}(p)$ とすると、$S_n := X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{B}(n,p)$. S_n の実現値を s とする。命題 2.5(a) より $W_2 \sim F_{2(n-s)}^{2(s+1)}$ とすると、

$$P(S_n \le s) = P\Big(W_2 \ge \frac{n-s}{s+1}\frac{p}{1-p}\Big)$$

となるので、左辺 $\ge \varepsilon/2$ なら、

$$\frac{n-s}{s+1}\frac{p}{1-p} < F_{2(n-s)}^{2(s+1)}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \qquad \text{すなわち} \quad p < \frac{(s+1)F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(\frac{\varepsilon}{2})}{n-s+(s+1)F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(\frac{\varepsilon}{2})}.$$

同様に、命題 2.5(a) より $W_1 \sim F_{2s}^{2(n-s+1)}$ とすると、

$$P(S_n \ge s) = P\Big(W_1 \ge \frac{s}{n-s+1}\frac{1-p}{p}\Big)$$

となるので、左辺 $\ge \varepsilon/2$ なら、

$$\frac{s}{n-s+1}\frac{1-p}{p} < F_{2s}^{2(n-s+1)}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \qquad \text{すなわち} \quad p > \frac{s}{s+(n-s+1)F_{2s}^{2(n-s+1)}(\frac{\varepsilon}{2})}.$$

従って、信頼係数 $1-\varepsilon$ の p の信頼区間は、$\left(\frac{s}{s+(n-s+1)F_{2s}^{2(n-s+1)}(\frac{\varepsilon}{2})}, \frac{(s+1)F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(\frac{\varepsilon}{2})}{n-s+(s+1)F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(\frac{\varepsilon}{2})}\right)$ となる。ただし、s は S_n の実現値である。

例題 2.9 ある町で A 製品のデザインの評判をアンケート用紙によって調べたところ、35 人中 6 人が好感をもてるという回答をよせてきた。この町における、デザインの支持割合を (a) 上記の精密法で、(b) 中心極限定理により正規分布に近似されるとして、信頼係数 0.90 で区間推定せよ。

解: (精密法) 標本数 $n=35$, 実現値 $s=6$ で

$$\frac{s}{s+(n-s+1)F_{2s}^{2(n-s+1)}(0.05)} = \frac{6}{6+30F_{12}^{60}(0.05)} = \frac{6}{6+30\cdot 2.384} = 0.077399\cdots.$$

一方、$F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(0.05) = F_{58}^{14}(0.05) \fallingdotseq F_{60}^{15}(0.05) = 1.836$ より

$$\frac{(s+1)F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(0.05)}{n-s+(s+1)F_{2(n-s)}^{2(s+1)}(0.05)} \fallingdotseq \frac{7F_{60}^{15}(0.05)}{29+7F_{60}^{15}(0.05)} = \frac{7\cdot 1.836}{29+7\cdot 1.836} = 0.307082\cdots.$$

よって、90% 信頼区間は $(0.0773, 0.3071)$.

(近似法) 標本数 $n=35$, 標本比率の実現値 $\hat{p} = \dfrac{6}{35}$ より

$$\hat{p} \pm u(0.05)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{6}{35} \pm 1.645\sqrt{\frac{6\cdot 29}{35^3}} = \begin{cases} 0.278223\cdots \\ 0.066634\cdots \end{cases}$$

より求める信頼区間は $(0.0666, 0.2783)$. $\square$

問題 2.4 以下の問いに答えよ。ただし、信頼区間の 上限・下限の端数はともに四捨五入 することで指定した位まで求めよ。
(1) 電話の通話時間は指数分布に従うとする。15 件の例について調べたところ、平均通話時間は 120 秒であった。このとき、平均通話時間 μ (秒) の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。また、信頼係数 0.90 の信頼区間を求めよ。ただし、小数点以下第 1 位まで求めよ。
(2) あるガラス工場で製造されるガラス板から 10 枚無作為抽出したところ検出されたアワの数は次のようであった。1 枚当たりのアワの数の平均を (a) 精密法で、(b) 中心極限定理により正規分布に近似されるとして、信頼係数 0.95 で区間推定せよ。

$$2,\ 4,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 3,\ 1,\ 4\ \ (\text{単位 個/枚})$$

ただし、一枚当たりのアワの発生個数は Poisson 分布に従うとし、小数点以下第 2 位まで求めよ。
(3) ある種の種子の発芽する確率を知りたいという。いま、24 個について実験したところ、5 個が発芽したという。この確率を (a) 精密法で、(b) 中心極限定理により正規分布に近似されるとして、信頼係数 0.90 で区間推定せよ。ただし、小数点以下第 3 位まで求めよ。

2.3 統計的検定

統計的検定は、母集団の確率分布、例えば密度関数 $f(x|\theta)$ が与えられているときに、その母数 θ についての仮説 $\theta=\theta_0$ が正しいか否かを、母集団からの標本 $x_1,\dots,x_n$ の解析結果によって判断することである。ここで仮説 $\theta=\theta_0$ を**帰無仮説**といい、H_0 で表す。

仮説 H_0 が正しいときに、これを正しくないと判定してしまう誤りを**第 1 種の誤り**といい、H_0 が正しくないとき、これを正しいとする誤りを**第 2 種の誤り**という。統計的検定法において**第 1 種の誤りのおこる確率**はあらかじめ定めた値 (通常は 5% あるいは 1%) にしておいて、**第 2 種の誤りのおこる確率**はなるべく小さくまるように方式を定めている。

このような第 1 種の誤りのおこる確率を検定の**危険率**あるいは**有意水準**という。

標本の大きさ n を大きくすれば、第 1 種の誤りのおこる確率 ε が一定となっているので、第 2 種の誤りのおこる確率 p_2 はだんだん小さくなることは直感的に明らかであろう。しかし n があまり大きくないときは、p_2 が小さいという保証はない。したがって H_0 を正しくないとする (H_0 を**棄却**する) ときは "積極的" に、H_0 を正しいとする (H_0 を**採択**する) ときは "消極的" に考えるという立場をとるのが賢明であろう。H_0 が正しくないときに考えられる仮説を**対立仮説**といい、H_1 でこれを表す。

対立仮説 $H_1:\theta=\theta_1$ のように 1 点で表せるときには、この仮説を**単純仮説**、いくつかの点の集合で表せるときには**複合仮説**という。(以上「国沢清典編 確率統計演習 2 統計 培風館, 1966」より。)

帰無仮説 H_0 が棄却となるために標本の属する領域を**棄却域**という。特に、第 1 種の誤りのおこる確率を ε に保ちつつ、第 2 種の誤りのおこる確率を最小にする棄却域を**最良棄却域**という。

対立仮説が単純仮説の場合に、最良棄却域を作る手順を決めるのが次の Neyman-Pearson の定理である。

定理 2.6 (Neyman-Pearson) $X_1,\dots,X_n$ が i.i.d. で、θ を未知母数とし、その密度関数を $f(x|\theta)$ とする。このとき定数 c を

$$R^*=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,;\,\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}\ge c\right\} \tag{2.5}$$

とおき、$P((X_1,\cdots,X_n)\in R^*|\theta_0)=\varepsilon$ を満たすように仮説 $H_0:\theta=\theta_0$ の棄却域を定めるとき、この検定は対立仮説 $H_1:\theta=\theta_1$ に対いて第 1 種の誤りのおこる確率が ε の最強力検定となる。

証明: 密度関数を持つときのみ示す。棄却域 R が

$$\text{第 1 種の誤りのおこる確率} = P((X_1,\cdots,X_n)\in R\,|\,\theta_0)$$

を満たすとする。ここで、第 2 種の誤りのおこる確率 $= P((X_1,\cdots,X_n)\notin R\,|\,\theta_1)$ が $R=R^*$ で最少となることを示せばよい。これは

$$
\begin{aligned}
&P((X_1,\cdots,X_n)\notin R\,|\,\theta_1)-P((X_1,\cdots,X_n)\notin R^*\,|\,\theta_1)\\
&=\{1-P((X_1,\cdots,X_n)\in R\,|\,\theta_1)\}-\{1-P((X_1,\cdots,X_n)\in R^*\,|\,\theta_1)\}\\
&=P((X_1,\cdots,X_n)\in R^*\,|\,\theta_1)-P((X_1,\cdots,X_n)\in R\,|\,\theta_1)\\
&=\{P((X_1,\cdots,X_n)\in R^*\cap R\,|\,\theta_1)-P((X_1,\cdots,X_n)\in R^*\cap R^{\mathrm{c}}\,|\,\theta_1)\}\\
&\quad-\{P((X_1,\cdots,X_n)\in R\cap R^*\,|\,\theta_1)-P((X_1,\cdots,X_n)\in R\cap (R^*)^{\mathrm{c}}\,|\,\theta_1)\}\\
&=\int\cdots\int_{R\cap(R^*)^{\mathrm{c}}}\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)\,dx_1\cdots dx_n-\int\cdots\int_{R^*\cap R^{\mathrm{c}}}\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)\,dx_1\cdots dx_n\\
&\geq c\int\cdots\int_{R\cap(R^*)^{\mathrm{c}}}\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)\,dx_1\cdots dx_n-c\int\cdots\int_{R^*\cap R^{\mathrm{c}}}\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)\,dx_1\cdots dx_n\\
&=c\,\{P((X_1,\cdots,X_n)\in R^*\,|\,\theta_0)-P((X_1,\cdots,X_n)\in R\,|\,\theta_0)\}\\
&=c(\varepsilon-\varepsilon)=0.
\end{aligned}
$$

となることから従う。　□

例 2.10 (正規母集団の平均に関する検定 (単純仮説の場合)) $X_1,\cdots,X_n$ を正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ からの無作為標本とする。母分散 σ^2 は既知であるとして、母平均 μ について、帰無仮説 $H_0:\ \mu=\mu_0$, 対立仮説 $H_1:\mu=\mu_1\ (\mu_0>\mu_1)$ に関する最良棄却域を求めよう。

各 X_i の密度関数は $f(x|\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ であるから、尤度関数比は

$$
\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\mu_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\mu_0)}&=\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_1)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\Big\}\\
&=\exp\Big\{-\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma^2}n\overline{x}+\frac{N}{2\sigma^2}(\mu_0-\mu_1)(\mu_0+\mu_1)\Big\}
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$\overline{x}=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ である。ここで $\dfrac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\mu_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\mu_0)}\geq c$ より

$$
\overline{x}\leq C\qquad ただし、\quad C=\frac{1}{2}(\mu_0+\mu_1)-\frac{\sigma^2\log c}{n(\mu_0-\mu_1)}
$$

を得る。よって、$R_C=\{(x_1,\cdots,x_n)\,;\,\overline{x}\leq C\}$ とおき、

$$
P((X_1,\cdots,X_n)\in R_C\,|\,\mu_0)=\varepsilon \tag{2.6}
$$

となるように C を定めればよい。

$H_0:\mu=\mu_0$ のもと、$\overline{X}$ は $\mathrm{N}\Big(\mu_0,\dfrac{\sigma^2}{n}\Big)$ に、よって $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ が $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので、(2.6) は

$$
\varepsilon=P(\overline{X}\leq C\,|\,\mu_0)=P\Big(Z\leq\frac{C-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)
$$

より $u(\varepsilon)$ を $\mathrm{N}(0,1)$ の上側 ε 点とすると $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(C-\mu_0)=-u(\varepsilon)$ が成り立ち、$C=\mu_0-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u(\varepsilon)$ となる。したがって、

$$
\overline{X}\leq\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u(\varepsilon) \tag{2.7}
$$

が最良棄却域である。

また、対立仮説が $H_1:\mu_1>\mu_0$ のときは、$\overline{X}\geq\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u(\varepsilon)$ が最良棄却域である。　□

問題 2.5 $X_1, \cdots, X_n$ は i.i.d. で、正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 100)$ に従うとき、帰無仮説 $H_0: \mu = 100$ を対立仮説 $H_1: \mu = 105$ に関して有意水準 5% で検定するとき、第 2 種の誤りの確率を 10% 以下にするには n をどのくらい大きくすればよいか。

定義 2.4 (一様最強力検定の棄却域) 帰無仮説 $H_0: \theta = \theta_0$, 対立仮説 $H_1: \theta \in D$ (複合仮説) とする。このとき、次の (1), (2) を満たす R_0 を、有意水準 ε の**一様最強力検定の棄却域** という。
(1) $P((X_1, \cdots, X_n) \in R_0 \,|\, \theta_0) = \varepsilon.$
(2) $P((X_1, \cdots, X_n) \in R \,|\, \theta_0) = \varepsilon$ を満たす任意の R と任意の $\theta \in D$ に対して、

$$P((X_1, \cdots, X_n) \in R_0 \,|\, \theta) \geq P((X_1, \cdots, X_n) \in R \,|\, \theta)$$

が成り立つ。

例 2.11 (正規母集団の平均に関する検定 (片側検定の場合)) 正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ において、σ^2 は既知であるとき、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ であるとする。このとき、有意水準 ε での棄却域 $R: \overline{X} \geq \mu_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u(\varepsilon)$ は一様最強力検定の棄却域となる。

証明: 対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1 (> \mu_0)$ であるときの棄却域は、Neyman-Pearson の定理により、

$$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u(\varepsilon)$$

となる。ここで、この棄却域は μ_1 に依存していないことに注意する。このことにより、上の棄却域は $H_1: \mu > \mu_0$ に対する一様強力検定の棄却域となることがわかった。 $\square$

<u>**尤度比検定法**</u> 次に、対立仮説が複合仮説である場合に有効な検定法であり尤度比検定法を考える。

帰無仮説を $H_0: \theta = \theta_0$ とし、対立仮説を $H_1: \theta \in D$ とする。このとき、尤度比 λ を

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\max_{\theta \in D} \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}$$

で定める。この λ が小さくなればなるほど、帰無仮説が成り立たなくなることを意味するものと考えられる。そこで棄却域を

$$R_c = \{(x_1, \cdots, x_n); \lambda \leq c\}$$

とおき、

$$P((X_1, \cdots, X_n) \in R_c \,|\, \theta) = \varepsilon$$

が成り立つ c の値を求め、棄却域を定める。

例 2.12 (1) σ^2 が既知のときの $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の尤度比検定による μ の棄却域
帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ とする。まず、尤度比 λ は

$$\lambda = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big\{-\frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\Big\}}{\displaystyle\max_{\mu} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}}$$

となる。分母の最大値を求めるため、

$$f(\mu) = \log \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\Big\} = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

とおくと、$f'(\mu) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \dfrac{n}{\sigma^2}(\overline{x} - \mu)$ より、$\mu = \overline{x}$ のとき最大になるので、

$$\lambda = \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\Big\} = \exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x} - \mu_0)^2\Big\}.$$

ここで、$\lambda \leq c$ より

$$|\overline{x} - \mu_0| \geq C \quad ここで \quad C = \Big(-\frac{2\sigma^2}{n}\log c\Big)^{1/2}.$$

ここで、H_0 のもと、$\overline{X}$ は $\mathrm{N}\Big(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\Big)$ に従うので、$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$. よって、

$$\varepsilon = P\Big(|\overline{X} - \mu_0| \geq C \,\Big|\, \mu_0\Big) = P\Big(|Z| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}C\Big)$$

であるが、これより $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}C = u\Big(\dfrac{1}{2}\varepsilon\Big)$ となるので、棄却域は

$$|\overline{X} - \mu_0| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u\Big(\frac{1}{2}\varepsilon\Big)$$

となる。 □

(2) σ^2 が未知のときの $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の尤度比検定による μ の棄却域

帰無仮説 $H_0:\ \mu = \mu_0,\ 0 < \sigma^2 < \infty$, 対立仮説 $H_1:\ \mu \neq \mu_0,\ 0 < \sigma^2 < \infty$ として考える。尤度比 λ を

$$\lambda = \frac{\displaystyle\max_{\sigma^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big\{-\frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\Big\}}{\displaystyle\max_{\mu,\sigma^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}}$$

と考える。ここで、$v = \sigma^2$ とし、

$$f(\mu, v) = \log\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\Big\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2v}\Big\} = -\frac{n}{2}\log(2\pi v) - \frac{1}{2v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

とおく。このとき

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{x} - \mu), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{n}{v} + \frac{1}{2v^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \tag{2.8}$$

より、$\mu = \overline{x},\ v = s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ のとき最大となる。

一方、$f(\mu_0, v)$ は (2.8) の第 2 式より v について $v = \overline{v} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$ のとき最大となる。従って、

$$\lambda = \frac{\Big(\dfrac{1}{2\pi\overline{v}}\Big)^{n/2}\exp\Big\{-\dfrac{1}{2\overline{v}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\Big\}}{\Big(\dfrac{1}{2\pi s^2}\Big)^{n/2}\exp\Big\{-\dfrac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\Big\}} = \Big(\frac{s^2}{\overline{v}}\Big)^{n/2}\frac{\exp\Big\{-\dfrac{n\overline{v}}{2\overline{v}}\Big\}}{\exp\Big\{-\dfrac{ns^2}{2s^2}\Big\}} = \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}\right)^{n/2}.$$

ここで、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}\{(x_i - \overline{x}) + (\overline{x} - \mu_0)\}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2$ より

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{u^2/n}}, \qquad u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

とおくと、

$$\lambda = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\mu_0)^2} \right)^{n/2} = \left(\frac{(n-1)u^2}{(n-1)u^2+n(t\sqrt{u^2/n})^2} \right)^{n/2} = \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n-1}} \right)^{n/2}$$

となる。

不等式 $\lambda \leq c$ より、

$$|t| \geq C \qquad \text{ここで} \qquad C = \sqrt{(n-1)(c^{-2/n}-1)}$$

となる。今、H_0 のもと、$X_1, \cdots, X_n$ は i.i.d. で $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2)$ に従うので、$T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{U^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う ($cf.$ 確率統計学 I 定理 3.8 を用いた)。よって、

$$P(|T| \geq C \,|\, \mu_0) = \varepsilon$$

より、$C = t_{n-1}(\frac{1}{2}\varepsilon)$ とすればよい。ここで、$t_{n-1}(\frac{1}{2}\varepsilon)$ は自由度 $n-1$ の t 分布の上側 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 点である。以上より、棄却域は

$$|T| \geq t_{n-1}\Big(\frac{1}{2}\varepsilon\Big)$$

となる。　□

(3) 正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の尤度比検定による分散 σ^2 の棄却域

帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2, -\infty < \mu < \infty$, 対立仮説 $H_1: \sigma^2 \neq {\sigma_0}^2, -\infty < \mu < \infty$ として考える。尤度比 λ は

$$\lambda = \frac{\max_{\mu} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} \exp\Big\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2v_0}\Big\}}{\max_{\mu, v} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\Big\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2v}\Big\}}$$

となる。ここで、$v = \sigma^2$, $v_0 = \sigma^2$ とした。このとき、(2.8) より分母は $\mu = \overline{x}$, $v = s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ のとき最大となる。また、分子は $\mu = \overline{x}$ のとき最大となるので、

$$\lambda = \frac{\Big(\frac{1}{2\pi v_0}\Big)^{n/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2v_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\Big\}}{\Big(\frac{1}{2\pi s^2}\Big)^{n/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\Big\}} = \Big(\frac{s^2}{v_0}\Big)^{\frac{n}{2}} \frac{\exp\Big\{-\frac{ns^2}{2v_0}\Big\}}{\exp\Big\{-\frac{ns^2}{2s^2}\Big\}} = \Big(\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{n}{2}\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}+\frac{n}{2}\Big\}.$$

不等式 $\lambda \leq c$ を解くと、ある $0 < C_1 < C_2$ に対して、

$$\frac{ns^2}{{\sigma_0}^2} \leq C_1 \quad \text{または} \; C_2 \leq \frac{ns^2}{{\sigma_0}^2}$$

となる。H_0 のもと、$\dfrac{ns^2}{{\sigma_0}^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うことに注意して

$$P\Big(\frac{ns^2}{{\sigma_0}^2} \leq C_1\Big) = \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad P\Big(\frac{ns^2}{{\sigma_0}^2} \geq C_2\Big) = \frac{1}{2}\varepsilon$$

となるように C_1, C_2 を定めると、$C_1 = \chi^2_{n-1}(1-\frac{1}{2}\varepsilon)$, $C_2 = \chi^2_{n-1}(\frac{1}{2}\varepsilon)$ となる。従って、棄却域は

$$\frac{ns^2}{{\sigma_0}^2} \leq \chi^2_{n-1}\Big(1-\frac{1}{2}\varepsilon\Big) \qquad \text{または} \qquad \frac{ns^2}{{\sigma_0}^2} \geq \chi^2_{n-1}\Big(\frac{1}{2}\varepsilon\Big)$$

となる。　□

2.4 二標本検定

ここでは 2 つの正規母集団の母数の比較に関する仮説検定について述べる。ここでは、棄却域のみを述べるが、(1)–(4) は一様最強力不偏検定 (この授業では扱わなかった, 詳しくは Lehemann: Testing Statistical Hypotheses などを参照せよ) の棄却域となっている。また、(1)–(4) は尤度比検定法でも導出できる。

$X_1, \ldots, X_m$ と $Y_1, \ldots, Y_n$ は独立で各 X_i は $\mathrm{N}(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ に各 Y_i は $\mathrm{N}(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ に従うとする。また、それぞれの標本平均を $\overline{X}, \overline{Y}$ と標本分散を ${S_X}^2$, ${S_Y}^2$ と表す。

(1) 帰無仮説 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ の検定 (母分散 ${\sigma_1}^2$ と ${\sigma_2}^2$ は既知)

標本平均 $\overline{X}, \overline{Y}$ は独立で、$\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu_1, {\sigma_1}^2/m)$ に $\overline{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_2, {\sigma_2}^2/n)$ より、$\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, {\sigma_1}^2/m + {\sigma_2}^2/n)$.
これより、H_0 の下、$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{{\sigma_1}^2/m + {\sigma_2}^2/n}}$ は $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので、有意水準を ε とし、

対立仮説が H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合、棄却域は $|Z| \geq u\bigl(\tfrac{1}{2}\varepsilon\bigr)$ に
対立仮説が H_1 : $\mu_1 > \mu_2$ の場合、棄却域は $Z \geq u(\varepsilon)$ となる。

(2) 対 (pair) で観測される標本における H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ の検定 (母分散 ${\sigma_1}^2$ と ${\sigma_2}^2$ は未知)

例えば、同一人の血圧を薬剤の服用前後での血圧の変化の有無など、同一個体に異なった 2 条件で測定を行い、その影響を検定する。従って、$m = n$ で、観測値は $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ のように対 (pair) で得られている (ここでは、各 i において X_i と Y_i は必ずしも独立でなくともよいとする) 場合を考える。

この場合、$Z_i = X_i - Y_i$ とし Z_i は平均 $\mu_1 - \mu_2$ の同一の正規分布に従うので、この $Z_1, \ldots, Z_n$ についての母分散が未知の場合の母平均の検定とみなせるので、H_0 の下、統計量 $T = \dfrac{\overline{Z}}{\sqrt{{U_Z}^2/n}}$ が自由度 $n-1$ の t 分布に従うことにより検定できる。ここで、${U_Z}^2$ は $Z_1, \ldots, Z_n$ の不偏分散である。

(3) H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ の検定 (${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ で値は未知)

$\sigma^2 = {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ とかく。(1) の場合と同様に、標本平均 $\overline{X}, \overline{Y}$ について $\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathrm{N}\Bigl(\delta, \Bigl(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\Bigr)\sigma^2\Bigr)$ となる。
一方、標本分散 ${S_X}^2 = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\bigl(X_i - \overline{X}\bigr)^2$, ${S_Y}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\bigl(Y_j - \overline{Y}\bigr)^2$ について、$\dfrac{m{S_X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$, $\dfrac{n{S_Y}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ でこれらは独立なので $\dfrac{m{S_X}^2}{\sigma^2} + \dfrac{n{S_Y}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m+n-2}$. さらに、これは $\overline{X} - \overline{Y}$ とも独立なので

$$T = \frac{\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}}}{\sqrt{\dfrac{m{S_X}^2 + n{S_Y}^2}{\sigma^2(m+n-2)}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{m{S_X}^2 + n{S_Y}^2}{m+n-2}\Bigl(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\Bigr)}} \tag{2.9}$$

は自由度 $m+n-2$ の t 分布に従う。

これより、帰無仮説 H_0 の検定は、有意水準を ε とし、

対立仮説が H_1 : $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ ならば、棄却域は $|T| \geq t_{m+n-2}\bigl(\tfrac{1}{2}\varepsilon\bigr)$ に
対立仮説が H_1 : $\mu_1 - \mu_2 > \delta$ ならば、棄却域は $Z \geq t_{m+n-2}(\varepsilon)$ となる。

(4) H_0 : ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ の検定 (μ_1, μ_2 は未知)

標本分散 ${S_X}^2, {S_Y}^2$ について $\dfrac{m{S_X}^2}{{\sigma_1}^2} \sim \chi^2_{m-1}$, $\dfrac{n{S_Y}^2}{{\sigma_2}^2} \sim \chi^2_{n-1}$ でこれらは独立なので、

$$F = \frac{m{S_X}^2}{{\sigma_1}^2(m-1)} \Bigg/ \frac{n{S_Y}^2}{{\sigma_2}^2(n-1)} = \frac{m{S_X}^2}{n{S_Y}^2}\frac{n-1}{m-1} \tag{2.10}$$

は自由度 $(m-1, n-1)$ の F 分布に従う。

これより、帰無仮説 H_0 の検定は、有意水準を ε とし、対立仮説が $H_1 : {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$ ならば、棄却域は

$$F < F_{n-1}^{m-1}\bigl(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\bigr) \qquad \text{または} \quad F > F_{n-1}^{m-1}\bigl(\frac{1}{2}\varepsilon\bigr)$$

とすればよい。従って、実現値を代入して $F > 1$ であれば、$F > F_{n-1}^{m-1}\bigl(\frac{1}{2}\varepsilon\bigr)$ のとき H_0 を棄却し、$F < 1$ であれば $F \sim F_{n-1}^{m-1}$ のとき $\dfrac{1}{F} \sim F_{m-1}^{n-1}$ となることに注意して、$\dfrac{1}{F} > F_{m-1}^{n-1}\bigl(\frac{1}{2}\varepsilon\bigr)$ のとき H_0 を棄却すればよい。

また、対立仮説が $H_1 : {\sigma_1}^2 > {\sigma_2}^2$ ならば棄却域を $F > F_{n-1}^{m-1}(\varepsilon)$ と、$H_1 : {\sigma_1}^2 < {\sigma_2}^2$ ならば、棄却域を $\dfrac{1}{F} > F_{m-1}^{n-1}(\varepsilon)$ ととればよい。

例題 2.13 2 種の稲の 10 アール当たりの収穫量を比較検討する。今、10 アール区画の 25 面の水田を均一に耕作し、その 13 面の水田に A 種の稲を、12 面の水田に B 種の稲を播種した、その収穫量は A 種では標本平均 $\overline{x} = 917.3$, 標本分散 ${s_x}^2 = 26,828$ であり、B 種では $\overline{y} = 863.3$, ${s_y}^2 = 17,970$ であった。このとき、A 種と B 種では収穫量に差異があるといえるか。有意水準 0.05 で検定せよ。

解: A 種の稲の収穫量の平均を μ_1, 分散を ${\sigma_1}^2$, B 種のそれを μ_2, ${\sigma_2}^2$ とする。

<u>1st step</u> 等分散性を $H_0 : {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$, $H_1 : {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$ として、有意水準 0.10 として検定する。

実現値を $m = 13, n = 12$ に注意して (2.10) に代入して、

$$f = \frac{13 \cdot 26,828}{12 \cdot 17,970} \times \frac{12-1}{13-1} = 1.482565\cdots.$$

一方、$F_{12-1}^{13-1}(0.05) = 2.788 > f > 1$ より H_0 は受容される。よって、上記 (3) の検定法が適用可能となる。

<u>2nd step</u> $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ を、有意水準 0.05 で検定する。

実現値を $\delta = 0$ として (2.9) に代入して、

$$t = \frac{917.3 - 863.3}{\sqrt{\dfrac{13 \cdot 26,828 + 12 \cdot 17,970}{25-2}\Bigl(\dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{12}\Bigr)}} = 0.86110\cdots.$$

一方、$t_{25-2}(0.025) = 2.068$ より H_0 は受容される。よって、収穫量に差異があるとは言えない。 □

(5) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ の検定 (${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ は未知)

(3) は ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ とできない場合には用いることができない。また、検定を二段階で行うのでは、例えば有意水準が正しく確保できているか不明なため、不適切であると考えられる。そのため、最近では ${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ が等しいかどうかにかかわらず、次の Welch の検定を用いることが推奨されているようである。

(Welch の検定) (1) で分散 ${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ の代わりにその不偏分散 $\widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2$ に置き換えた次の統計量を考える:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\widehat{\sigma}_1^2/m + \widehat{\sigma}_2^2/n}}, \qquad \widehat{\sigma}_1^2 = \frac{m{S_X}^2}{m-1}, \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \frac{n{S_Y}^2}{n-1}. \tag{2.11}$$

この分布は未知の分散比 ${\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2$ の影響を受ける (これを Behrens-Fisher's problem という) が、ここでは Welch の検定とよばれるものを紹介する。それは統計量 T が近似的に自由度 ϕ の t 分布に従うとみなせることであり、ϕ は次の式から定められる値である:

$$\frac{(\widehat{\sigma}_1^2/m + \widehat{\sigma}_2^2/n)^2}{\phi} = \frac{(\widehat{\sigma}_1^2/m)^2}{m-1} + \frac{(\widehat{\sigma}_2^2/n)^2}{n-1}. \tag{2.12}$$

例題 2.13 の Welch の検定による**解:** 実現値を (2.11) に代入して、$t = 0.8681\cdots$ を得る。次に (2.12) に実現値を代入して $\phi = 22.7\cdots$ を得るので、自由度を $\phi = 23$ と考える。ここで、$t_{23}(0.025) = 2.068$ より H_0 は受容される。よって、この方法でも収穫量に差異があるとは言えないことがわかる。 □