# 5　大数の法則

## 5.1　確率変数の極限

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする。

この節では、$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数列 $\{X_n\}$ の確率変数 $X$ への収束について述べる。

**定義 5.1** *(1)* **(概収束)** $X_n$ が $X$ に概収束 *(almost surely convergence)* するとは、$P$-*a.a.* $\omega$ に対して $X_n(\omega) \to X(\omega)$ *(*$n \to \infty$*)* であるとき、つまり

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big) = 1$$

あるいは、更に正確に言えば

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega\,;\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big\}\Big) = 1$$

であるときにいう。$X_n \to X$ *a.s.* と表す。*(*$X_n \to X$ *a.e.* とも表す。*)*

*(2)* **(確率収束)** $X_n$ が $X$ に確率収束 *(convergence in probability)* するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

のときにいう。$X_n \to X$ *in prob.* と表す。

*(3)* **($L^r$-収束)** $r \geq 1$ として、$X_n$ が $X$ に $L^r$-収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^r] = 0$$

のときにいう。$X_n \to X$ *in* $L^r$ と表す。$r$ 次平均収束 *(convergence in the mean of order* $r$*)* ともいう。

**注意 5.2** 確率変数がなす空間上に確率収束, $L^r$-収束が定める位相は、それぞれ距離付け可能である。(前者は演習問題 **4**(1) を参照せよ。後者は $r = 1, 2$ の場合のみ演習問題 (*cf.* $r = 2$ のときは **1**(1) の略解) とする。) 概収束は距離付けできない (*cf.* 演習問題 **4**(2))。

**定理 5.3** *(1)* $X_n$ が $X$ に概収束すれば、確率収束する。
*(2)* $X_n$ が $X$ に $L^r$-収束すれば、確率収束する。

**証明:** (1) $X_n$ が $X$ に収束するような $\omega$ の集合は

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big\} = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,j} \tag{5.1}$$

と表すことができる。ただし、

$$A_{m,j} = \Big\{|X_m - X| < \frac{1}{j}\Big\}$$

である。$X_n \to X$ a.s. であるから、この事象の確率は 1 である。(仮定より $\forall m, j$ に対して $A_{m,j} \in \mathcal{B}$ であるから、$\Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big\} \in \mathcal{B}$ となることに注意する。) ここで、$A_{m,j} \supset A_{m,j+1}$ $(\forall m, j)$ であるから、(5.1) により $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,j} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,j+1} \supset \cdots \supset \Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big\}$ となるので、

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,j}\Big) = 1 \qquad (\forall j \in \boldsymbol{N})$$

である。さらに、$B_{n,j} = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_{m,j}$ とすると、$B_{n,j} \subset B_{n+1,j}$ $(\forall n, j)$ だから、

$$\lim_{n\to\infty} P(B_{n,j}) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,j}\Big) = 1$$

となる。ここで、$B_{n,j} \subset A_{n,j}$ であるから、以上より $\forall j \in \boldsymbol{N}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{n,j}) = \lim_{n\to\infty} P\Big(|X_n - X| \le \frac{1}{j}\Big) = 1$$

であることがわかった。ここで、$\forall \varepsilon > 0$ が与えられたとき、$j$ を十分大きくとって $1/j < \varepsilon$ とすれば

$$\Big\{|X_n - X| \le \frac{1}{j}\Big\} \subset \{|X_n - X| < \varepsilon\}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|X_n - X| < \varepsilon\big) = 1$$

が得られ、余事象を考えれば、$X_n$ が $X$ に確率収束していることがわかる。(2) の証明には次を必要とする。

**命題 5.4 (チェビシェフ (Chebyshev) の不等式)** $r > 0,\ \lambda > 0$ と確率変数 $Y$ について次の不等式が成立する。

$$P(|Y| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda^r} E[|Y|^r]$$

**証明:** まず、次に注意する。

$$1_{\{|Y|\ge\lambda\}} \le \Big(\frac{|Y|}{\lambda}\Big)^r 1_{\{|Y|\ge\lambda\}} \le \frac{|Y|^r}{\lambda^r}$$

であるから ($1_A$ は定義関数、即ち、$1_A(\omega) = 1$ $(\omega \in A)$, $1_A(\omega) = 0$ $(\omega \notin A)$ なる関数)、両辺の期待値をとって

$$P(|Y| \ge \lambda) = E[1_{\{|Y|\ge\lambda\}}] \le E\Big[\frac{|Y|^r}{\lambda^r}\Big] = \frac{1}{\lambda^r} E[|Y|^r]. \qquad \Box$$

**定理 5.3(2) の証明:** 仮定と Chebyshev の不等式により

$$P(|X_n - X| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^r} E[|X_n - X|^r] \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる。 $\Box$

**例 5.5** 定理 5.3(1), (2) の逆は、必ずしも成立しない。また、概収束と $L^r$-収束の間に強弱の関係はない。$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ をそれ上の Borel 集合全体, $P$ を Lebesgue 測度としてそれを例示する。

- $L^r$-収束する (従って確率収束する) が、概収束しない例
  $X_{n,k}(\omega) = 1_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(\omega)$, $\omega \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$ とおき、これを

  $$X_{1,1},\ X_{2,1},\ X_{2,2},\ X_{3,1},\ X_{3,2},\ X_{3,3},\ X_{4,1},\ \ldots$$

  のように並べた列を考える。この確率変数は $X \equiv 0$ に $L^r$-収束の意味で収束するが、概収束しない。(この証明は演習問題 **3**(1) とする。)
- 概収束する (従って確率収束する) が、$L^r$-収束しない例
  $X_n(\omega) = n1_{(0,\frac{1}{n})}(\omega)$, $\omega \in [0,1]$ を考えると、これは $X \equiv 0$ に概収束するが、$L^r$-収束しない。(この証明も演習問題 **3**(2) とする。)

**定理 5.6** $X_n$ が $X$ に確率収束するならば、適当に部分列を選んで概収束するようにできる。特に、$L^r$-収束すれば *(*確率収束するから*)*、適当に部分列を選んで概収束するようにできる。

**定理 5.7 (Borel-Cantelli の定理)** $\{B_n\} \subset \mathcal{B}$ を事象の列とする。
*(1)* $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty \implies P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k) = 0$
*(2)* $\{B_n\}$ が独立で $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty \implies P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k) = 1.$

**証明:** $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$ $(\forall n)$ より、

$$0 \le P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k) \le P(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k).$$

ここで、$\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$ より $\sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) \to 0$ $(n \to \infty)$. よって、$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k) = 0$ を得る。
(2) $(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k^{\mathrm{c}}$ で $\{\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k^{\mathrm{c}}\}$ は $n$ について単調増加、また、$\{\bigcap_{k=n}^{N} B_k^{\mathrm{c}}\}$ は $N$ について単調減少で $\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k^{\mathrm{c}} = \bigcap_{N=n}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{N} B_k^{\mathrm{c}}$ なので、

$$P((\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k)^c) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k^{\mathrm{c}}) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{N} B_k^{\mathrm{c}}). \tag{5.2}$$

次に、仮定と定理 1.7 (2) により $B_n^{\mathrm{c}}, \dots, B_N^{\mathrm{c}}$ は独立であることと、$P(B_k^{\mathrm{c}}) = 1 - P(B_k) \le e^{-P(B_k)}$ となること[*1]を用いて、

$$0 \le P(\bigcap_{k=n}^{N} B_k^{\mathrm{c}}) = \prod_{k=n}^{N} P(B_k^{\mathrm{c}}) \le \prod_{k=n}^{N} e^{-P(B_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{N} P(B_k)}.$$

ここで、$\sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) = \infty$ だから、(右辺)$\to 0$ $(N \to \infty)$. 以上より、(5.2) より $P((\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k)^{\mathrm{c}}) = 0$ となるから主張を得る。 □

**定理 5.6 の証明:** 各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$X_n$ は $X$ に確率収束するから、$\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ として、ある $N_k$ があって

$$n \ge N_k \implies P\Big(|X_n - X| \ge \frac{1}{2^k}\Big) \le \frac{1}{2^k}$$

とできる。特に、ある番号の列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ があって ($n_1 = N_1$, $n_k = \max\{N_k, n_{k-1} + 1\}$, $k \ge 2$ とせよ)、$P\Big(|X_{n_k} - X| \ge \dfrac{1}{2^k}\Big) \le \dfrac{1}{2^k}$ とできる。
この $X_{n_k}$ が $X$ に概収束することを示す。$C_k = \Big\{|X_{n_k} - X| \ge \dfrac{1}{2^k}\Big\}$ とおくと、

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

であるから、Borel-Cantelli の定理 (1) により、$P\Big(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} C_k\Big) = 0.$ ここで、

$$\omega \in \Big(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} C_k\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=l}^{\infty} {C_k}^{\mathrm{c}} \text{とすると} \exists l \in \boldsymbol{N} \text{ such that } \forall k \ge l \text{ に対し } |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{2^k}$$
$$\text{すなわち} \lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = X(\omega)$$

となる。これは、$X_{n_k}$ は $X$ に概収束することを意味している。 □

[*1] $0 \le x \le 1$ のとき $0 \le 1 - x \le e^{-x}$ を用いた。

## 5.2 大数の弱法則

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数列 $\{X_n\}$ に対して、その平均 $S_n/n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ の収束について議論する。

**定義 5.8** ある数列 $\{c_n\}$ に対し、
*(1)* $S_n/n - c_n$ が 0 に確率収束するとき、大数の弱法則 *(weak law of large numbers)* が成立すると、
*(2)* $S_n/n - c_n$ が 0 に概収束するとき、大数の強法則 *(strong law of large numbers)* が成立するという。

**定理 5.9** $X_1, X_2, \ldots$ が組ごとに独立、つまりどの組 $i, j$ $(i \neq j)$ をとっても $X_i$ と $X_j$ は独立で、

$$\sup_n V(X_n) < \infty$$

ならば、数列 $\{c_n\}$ が存在し $S_n/n - c_n$ は 0 に $L^2$-収束する。特に、大数の弱法則を満たす。ただし、$V(X) = E[(X - E[X])^2]$ は $X$ の分散を表す。

**証明:** $L^2$-収束することが示されれば、大数の弱法則は定理 5.3 から従う。$m_n = E[X_n]$ とし、$c_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m_j$ とすると、

$$\begin{aligned} E\Big[\Big(\frac{S_n}{n} - c_n\Big)^2\Big] &= \frac{1}{n^2} E\Big[\Big\{\sum_{j=1}^{n}(X_i - m_i)\Big\}^2\Big]\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} E[(X_j - m_j)^2] \le \frac{1}{n}\sup_j V(X_j) \ \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

となり、$L^2$-収束することがわかる。ここで、2 行目第 1 の等号は $i \neq j$ のとき $X_i$ と $X_j$ は独立であるから

$$E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] = E[X_i - m_i]E[X_j - m_j] = (E[X_i] - m_i)(E[X_j] - m_j) = 0$$

となることを用いた。 □

**例 5.10 (株式投資)** ある株価の月ごとの成長率が確率変数で $X_1, X_2, \ldots$ ($n$ ヶ月目に $n-1$ ヶ月目に比べて $X_n$ 倍になる) と表せるとする。この株の株価は $n$ ヵ月後には元値の $Y_n = \prod_{j=1}^{n} X_j$ 倍になる。$Y_n$ が長期的にどうなるか予想したい。ここでは、簡単のため $X_1, X_2, \ldots$ を区間 $(a, b)$ $(0 < a < 1 < b)$ の値をとる i.i.d. とする。(i.i.d. は独立で同分布に従う independently, identically distributed の略。) $Y_n$ の対数を取ると、

$$\log Y_n = \sum_{j=1}^{n} \log X_j$$

で $\log X_1, \log X_2, \ldots$ は i.i.d で有界 (従って分散が存在する) なので、定理 5.9 より $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\log Y_n - l\Big| \le \varepsilon\Big) \to 1, \qquad \text{ただし } l = E[\log X_1]$$

すなわち、

$$P\left(e^{(l-\varepsilon)n} \le Y_n \le e^{(l+\varepsilon)n}\right) \to 1 \tag{5.3}$$

となる。$\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれるから、これより月ごとの平均的な成長率は $e^l$ となる。

一方、単純に $Y_n$ の平均をとると独立性より

$$E[Y_n] = E[X_1]\cdots E[X_n] = m^n, \qquad \text{ただし } m = E[X_1]$$

となり、ここから「月ごとの平均的な成長率は $m$」と思ってしまいそうだが、$e^l$ のほうが正しいことは (5.3) から明らかである。

例えば、$P(X_1=1.3)=3/5$, $P(X_1=0.6)=2/5$ の場合を考えると、

$$l=E[\log X_1]=\frac{3}{5}\log 1.3+\frac{2}{5}\log 0.6=-0.0469\cdots, \qquad m=E[X_1]=\frac{3}{5}1.3+\frac{2}{5}0.6=1.02$$

となり $e^l<1<m$. 従ってこの場合 $m>1$ を平均的な成長率と勘違いして投資すると、(5.3) により資産は指数的に減衰してしまう。

次は、任意の連続関数が有界閉集合上では多項式により一様に近似されることを意味している。定理 5.6 と同様に証明できるので、ここで扱う。

**定理 5.11 (Bernstein の多項式近似定理)** $f(x)$ を $[0,1]$ 上の連続関数とするとき、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le p\le 1}\left|f(p)-\sum_{k=0}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right|=0 \tag{5.4}$$

*絶対値の中の第 2 項は $p$ の $n$ 次多項式となっているが、これを Bernstein の多項式ということがある。*

**証明:** $0\le p\le 1$ を任意にとり固定する。$X_1,X_2,\ldots$ を i.i.d. で、各 $n$ で $P(X_n=1)=p$, $P(X_n=0)=1-p$ を満たすとする。このとき、$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ とおくと、$S_n$ は二項分布 $B(n,p)$ に従うので、

$$E\big[f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\big]=\sum_{k=0}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)P(S_n=k)=\sum_{k=0}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{5.5}$$

一方、$\forall\delta>0$ に対して、Chebyshev の不等式により

$$\begin{aligned}P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-p\Big|\ge\delta\Big)&=P(|S_n-np|\ge n\delta)\le\frac{1}{(n\delta)^2}E[|S_n-np|^2]=\frac{1}{(n\delta)^2}V(S_n)\\&=\frac{np(1-p)}{(n\delta)^2}=\frac{1}{n\delta^2}\Big\{-\Big(p-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{4}\Big\}\le\frac{1}{4n\delta^2},\end{aligned}$$

ここで、$V(S_n)$ は $S_n$ の分散であり $np(1-p)$ となることを用いた。よって、$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, $u_f(\delta)=\sup\limits_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|$ とおくと、

$$\begin{aligned}\Big|f(p)-E\big[f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\big]\Big|&=\Big|E\big[f(p)-f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\big]\Big|\le E\Big[\Big|f(p)-f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big|\Big]\\&=E\Big[\Big|f(p)-f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big|1_{\{|\frac{S_n}{n}-p|\ge\delta\}}\Big]+E\Big[\Big|f(p)-f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big|1_{\{|\frac{S_n}{n}-p|<\delta\}}\Big]\\&\le 2\|f\|_\infty P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-p\Big|\ge\delta\Big)+u_f(\delta)P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-p\Big|<\delta\Big)\le\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}+u_f(\delta).\end{aligned}$$

ここで、$f(x)$ は $[0,1]$ で連続であるから一様連続なので、$\lim\limits_{\delta\to 0}u_f(\delta)=0$. よって、任意の $\forall\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ があって、$u_f(\delta)<\varepsilon/2$. 次に $n$ を $n>\|f\|_\infty/(\varepsilon\delta^2)$ とすれば、

$$\Big|f(p)-E\big[f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\big]\Big|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ここで $n$ は $p$ に依存していないので (5.5) とあわせて、(5.4) は示された。 □

もう少し詳しく大数の弱法則を調べるため、以下の Lebesgue 積分の道具を導入する。証明は関数解析学 II で学習するものとして略す[*2]。(関数解析学 I,II の講義の教科書を調べてください。)

---

[*2] 期待値を Lebesgue 積分論の書き方で、$E[X]=\int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega)$ となることに注意せよ。

**定理 5.12 (単調収束定理)** 非負値の確率変数列 $\{X_n\}$ が単調増加 $0 \le X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_n \le \cdots$ であれば、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[\big(\lim_{n\to\infty} X_n\big)].$$

**定理 5.13 (Lebesgue の収束定理)** 確率変数列 $\{X_n\}$ が $X$ に概収束し、かつ非負確率変数 $Y$ で可積分 *(*$E[Y] < \infty$*)* なものが存在し任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|X_n| \le Y$ を満たすならば次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

**定理 5.14 (Fubini の定理)** $(R_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i),\ i = 1, 2,$ を二つの $\sigma$-有限な測度空間とする。関数 $f(x, y)$ がこの直積測度空間の関数として可測[*3]で、$f(x, y) \ge 0$ または $\displaystyle\int_{R_1\times R_2} |f(x, y)|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) < \infty$ を満たせば、次が成立する。

$$\int_{R_1\times R_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{R_2}\bigg(\int_{R_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)\bigg) d\mu_2(y) = \int_{R_1}\bigg(\int_{R_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)\bigg) d\mu_1(x).$$

**定理 5.15** $X_1, X_2, \ldots$ は独立とし、ある $b_n > 0,\ b_n \to \infty$ *(*$n \to \infty$*)* があって、$n \to \infty$ のとき、

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > b_n) \to 0, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{{b_n}^2} \sum_{k=1}^{n} E[{X_k}^2 1_{\{|X_k| \le b_n\}}] \to 0$$

とする。このとき、$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k,\ a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} E[X_k 1_{\{|X_k| \le b_n\}}]$ とすると、$\dfrac{S_n - a_n}{b_n}$ は 0 に確率収束する。

**証明:** $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k| \le b_n\}}$ とすると、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$P\Big(\Big|\frac{S_n - a_n}{b_n}\Big| > \varepsilon\Big) \le P(S_n \ne \tilde{S}_n) + P\Big(\Big|\frac{\tilde{S}_n - a_n}{b_n}\Big| > \varepsilon\Big).$$

ここで、

$$P(S_n \ne \tilde{S}_n) \le P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \big\{X_k \ne X_k 1_{\{|X_k| \le b_n\}}\big\}\Big) \le \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > b_n) \to 0, \qquad ((\text{a}) \text{ による}).$$

一方、$a_n = E[\tilde{S}_n]$ であるから、Chebyshev の不等式により

$$\begin{aligned} P\Big(\Big|\frac{\tilde{S}_n - a_n}{b_n}\Big| > \varepsilon\Big) &\le \frac{1}{\varepsilon^2} E\Big[\Big|\frac{\tilde{S}_n - a_n}{b_n}\Big|^2\Big] = \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} V(\tilde{S}_n) = \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k 1_{\{|X_k| \le b_n\}}) \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2 1_{\{|X_k| \le b_n\}}] \to 0, \qquad ((\text{b}) \text{ による}). \end{aligned}$$

ここで、最後の不等号は $V(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 \le E[Y^2]$ と $(X 1_A)^2 = X^2 1_A$ となることを用いた。 □

**定理 5.16** $X_1, X_2, \ldots$ は *i.i.d.* で、

$$xP(|X_1| > x) \to 0 \qquad (x \to \infty) \tag{5.6}$$

とする。このとき、$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k,\ c_n = E[X_1 1_{\{|X_1| \le n\}}]$ とすると、$\dfrac{S_n}{n} - c_n$ は 0 に確率収束する。

---

[*3] 例えば、$R_2 = \boldsymbol{R}$ で $\mathfrak{A}_2$ をその Borel 集合族とするとき、$f(x, y)$ が $\forall y$ を固定すると $x$ について $\mathfrak{A}_1$-可測で $\forall x$ を固定すると $y$ について右連続であれば、$f(x, y)$ は直積測度空間で可測となる (*cf.* 伊藤清三: ルベーグ積分入門 (1963), pp.68–69)。

**注意 5.17** 定理 5.16 の仮定は、$\dfrac{S_n}{n} - c_n$ が 0 に確率収束ような $c_n$ が存在するための必要条件でもある (*cf*. Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol.II, (1971) pp.234–6)。

**証明:** $X_1, X_2, \ldots$ は i.i.d. なので、定理 5.15 の $a_n$ に対して $a_n = nc_n$ となることに注意する。よって、定理 5.15 の条件 (a), (b) を $b_n = n$ に対して示せばよい。(a) は

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > n) = nP(|X_1| > n)$$

だから (5.6) より明らか。(b) のために次の補題を準備する。

**補題 5.18** $Y \geq 0,\, p > 0$ とすると、$E[Y^p] = \displaystyle\int_0^\infty py^{p-1}P(Y > y)\,dy.$

**証明:**
$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \int_0^\infty py^{p-1}\Big(\int_\Omega 1_{(y,\infty)}(Y(\omega))\,dP(\omega)\Big)dy = \int_\Omega\Big(\int_0^\infty py^{p-1}1_{(-\infty,Y(\omega))}(y)\,dy\Big)dP(\omega)\\ &= \int_\Omega\Big(\int_0^{Y(\omega)} py^{p-1}\,dy\Big)dP(\omega) = \int_\Omega Y(\omega)^p dP(\omega) = (\text{左辺}),\end{aligned}$$

ここで、第 2 の等号において、$py^{p-1}1_{(y,\infty)}(Y(\omega)) = py^{p-1}1_{(-\infty,Y(\omega))}(y) \geq 0$ に注意して Fubuni の定理を用いた。 □

**定理 5.16 の証明の続き:** $Y_n = |X_1|1_{\{|X_1|\leq n\}}$ とすると、$Y_n \geq 0$ より補題 5.18 から

$$E[Y_n^2] = \int_0^\infty 2yP(Y_n > y)\,dy = \int_0^n 2yP(Y_n > y)\,dy.$$

ここで、第 2 の等号は $P(Y_n > n) = 0$ より $P(Y_n > y) = 0$ $(y \geq n)$ となることを用いた。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E[X_k^2 1_{\{|X_k|\leq n\}}] &= \frac{1}{n}E[X_1^2 1_{\{|X_1|\leq n\}}] = \frac{1}{n}E[Y_n^2]\\ &= \frac{1}{n}\int_0^n 2yP(Y_n > y)\,dy = \frac{1}{n}\int_0^n 2yP(|X_1| > y)\,dy\end{aligned}$$

となるが、一般に $\varphi(x)$ が任意の有界閉区間で積分可能で $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$ を満たせば、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n \varphi(x)\,dx = 0$ となる (*cf*. 演習問題 **6(3)**) から、(5.6) より定理 5.15 の条件 (b) が成り立つことがわかる。 □

**定理 5.19** $X_1, X_2, \ldots$ が *i.i.d.* で $E[|X_1|] < \infty$ であれば、$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = E[X_1]$ とすると、$\dfrac{S_n}{n}$ は $m$ に確率収束する。

**証明:** $E[|X_1|] < \infty$ より $|X_1| < \infty$ a.s. であるから、$x \to \infty$ のとき $|X_1|1_{\{|X_1|>x\}} \to 0$ a.s. となる。よって、$\big||X_1|1_{\{|X_1|>x\}}\big| \leq |X_1|$ かつ $E[|X_1|] < \infty$ より Lebesgue の収束定理から

$$xP(|X_1| > x) = xE[1_{\{|X_1|>x\}}] \leq E[|X_1|1_{\{|X_1|>x\}}] \to E[0] = 0, \qquad x \to \infty.$$

また、$\big|X_1 1_{\{|X_1|\leq x\}}\big| \leq |X_1|$ かつ $E[|X_1|] < \infty$ より Lebesgue の収束定理から

$$E[X_1 1_{\{|X_1|\leq x\}}] \to E[X_1] = m, \qquad x \to \infty$$

となり、定理 5.16 より主張は従う。 □

平均が存在しない場合も $b_n$ をうまく選ぶことで定理 5.15 が使える。次の例を見てみよう。

**例 5.20 (サンクトペテルスブルグのパラドックス)** $X_1, X_2, \dots$ を i.i.d. で $P(X_1 = 2^i) = 1/2^i$, $i = 1, 2, \dots$, となるとする。このとき、$E[X_1] = \infty$ であり、$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ とおくと、$\forall \varepsilon > 0$ に対して次が成立する。

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n\log_2 n} - 1\right| \le \varepsilon\right) \to 1, \qquad n \to \infty. \tag{5.7}$$

この $X_k$ は、公正なコインを表が出るまで投げ続け、$i$ 回目に表が初めて出たとき $2^i$ 円受け取る宝くじを表す確率変数と考えられる。この宝くじはいくらの価値があるかであるが、$E[X_k] = \infty$ よりいくら出しても購入する価値がありそうである。しかし、この宝くじで 2 億円以上獲得するためには、$2^{28} = 268,435,456$ より 28 回目以降に初めて表が出る必要がある。その確率は 1.3 億分の 1 以下である。したがって、それほどの価値があるとは思えない。これに対して (5.7) は $n$ が十分大きければ、$n$ 本のセットで $n\log_2 n$ 円の価値があることを表している。例えば $2^{28}$ 本売るのであれば、一本あたり 28 円となる。

**証明:** $b_n = n\log_2 n$ とし $c_n = \lfloor \log_2 b_n \rfloor$ とする ($\lfloor a \rfloor$ は $a$ の整数部分を表す)。このとき、

$$\log_2 b_n - 1 < c_n \le \log_2 b_n \text{ より } 2^{-1}b_n < 2^{c_n} \le b_n, \text{ 即ち } 2^{c_n} \le b_n < 2^{c_n+1}$$

に注意する。よって、$n \to \infty$ のとき、

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=1}^n P(|X_k| > b_n) = nP(X_1 \ge 2^{c_n+1}) = n\sum_{i=c_n+1}^\infty \frac{1}{2^i} = n\frac{1/2^{c_n+1}}{1-1/2} = \frac{n}{2^{c_n}} < \frac{n}{2^{-1}b_n} = \frac{2}{\log_2 n} \to 0,$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \qquad \frac{1}{{b_n}^2}\sum_{k=1}^n E[{X_k}^2 1_{\{|X_k| \le b_n\}}] &= \frac{n}{{b_n}^2}E[{X_1}^2 1_{\{X_1 \le b_n\}}] = \frac{n}{{b_n}^2}\sum_{i=1}^{c_n}(2^i)^2\frac{1}{2^i} = \frac{n}{{b_n}^2}\frac{2(2^{c_n}-1)}{2-1} \\ &\le \frac{2n2^{c_n}}{{b_n}^2} \le \frac{2nb_n}{{b_n}^2} = \frac{2}{\log_2 n} \to 0.\end{aligned}$$

よって、定理 5.15 より $a_n = \sum_{k=1}^n E[X_k 1_{\{|X_k| \le b_n\}}]$ とすると、$\dfrac{S_n - a_n}{b_n}$ は 0 に確率収束する。ここで、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{b_n}E[X_1 1_{\{|X_1| \le b_n\}}] = \frac{n}{b_n}\sum_{i=1}^{c_n} 2^i\frac{1}{2^i} = \frac{nc_n}{b_n} = \frac{\lfloor \log_2(n\log_2 n)\rfloor}{\log_2 n} = \frac{\lfloor \log_2 n + \log_2\log_2 n\rfloor}{\log_2 n} \to 1.$$

最後の極限は対数関数の性質

$$\lim_{n\to\infty} \log_2 n = \infty \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2\log_2 n}{\log_2 n} = 0$$

に注意すれば容易に示せる。以上より (5.7) を得る。 □

**注意 5.21** (1) 定理 5.15, 5.16, 例 5.20 は、$X_1, X_2, \dots$ が同じ分布に従えば、組ごとに独立であれば成立する。(2) 定理 5.16 の仮定の下 ($X_1, X_2, \dots$ は i.i.d. とする)、$m \notin [a, b]$ なら $P(a \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \le b)$ は 0 に収束する。もし、$E[e^{tX_1}] < \infty$ ($\forall t \in \boldsymbol{R}$) であれば、この収束は指数的に速く減衰する。その収束の速さを決定するのが Cramér の定理である。これを**大偏差原理** (large deviation principle) といい、応用例も多く盛んに研究されている (*cf*. 直接計算できる例として演習問題 **10**)。

## 5.3 大数の強法則

**定理 5.22 (Kolmogorov の不等式)** $X_1, X_2, \dots$ を独立な確率変数列で、$\forall n$ に対して $E[X_n] = 0$ かつ $V(X_n) < \infty$ とする。このとき、任意の $a > 0$ に対して

$$P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^k X_j\right| \ge a\right) \le \frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^n V(X_j)$$

が成立する。

**証明:** $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ とし、評価したい事象を

$$A^* = \left\{ \omega \in \Omega\,;\ \max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge a \right\}$$

とおく。$S_k$ を確率過程のように考え $|S_k|$ がいつはじめて $a$ 以上になるか、そのような $k$ に着目して $A^*$ を互いに排反な事象に分ける。すなわち、$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$A_k^* = \{\, \omega \in \Omega\,;\ j = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ に対しては } |S_j| < a \text{ で、かつ } |S_k| \ge a \} \tag{5.8}$$

とおくと、$A^* = \bigcup_{k=1}^n A_k^*$ (互いに排反) となる。したがって、

$$P(A^*) = \sum_{k=1}^n P(A_k^*) = \sum_{k=1}^n E[1_{A_k^*}] \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^2} E[S_k^2 \cdot 1_{A_k^*}]$$

となる。最後の不等号は $\omega \in A_k^*$ ならば $S_k(\omega)^2 \ge a^2$ となることを用いた。ここで、

$$S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2 = S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 \ge S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)$$

に注意すると、

$$E[S_n^2 \cdot 1_{A_k^*}] - E[S_k^2 \cdot 1_{A_k^*}] \ge 2E[S_k(S_n - S_k) \cdot 1_{A_k^*}]$$

ここで、(5.8) より事象 $A_k^*$ は $X_1, \cdots, X_k$ のみによって決まっており、一方 $S_n - S_k = \sum_{j=k+1}^n X_j$ なので、$\{X_n\}$ は独立だから $S_k \cdot 1_{A_k^*}$ と $S_n - S_k$ は独立となる。したがって、

$$E[S_k(S_n - S_k) \cdot 1_{A_k^*}] = E[S_k \cdot 1_{A_k^*}] E[S_n - S_k] = E[S_k \cdot 1_{A_k^*}] \sum_{j=k+1}^n E[X_j] = 0.$$

以上より、

$$\begin{aligned} P(A^*) &\le \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^2} E[S_k^2 \cdot 1_{A_k^*}] \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^2} E[S_n^2 \cdot 1_{A_k^*}] = \frac{1}{a^2} E[S_n^2 \cdot 1_{A^*}] \le \frac{1}{a^2} E[S_n^2] \\ &= \frac{1}{a^2} V(S_n) = \frac{1}{a^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{a^2} \sum_{j=1}^n V(X_j) \end{aligned}$$

最後の等号では再び $X_1, \ldots, X_n$ が独立であることを用いた。 □

**定理 5.23 (Kolmogorov の第 1 定理)** $X_1, X_2, \ldots$ が独立な確率変数列で、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} V(X_n) < \infty \tag{5.9}$$

を満たせば、大数の強法則が成立、すなわち、$\dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])$ は 0 に概収束する。

**証明:** $\forall n \in \boldsymbol{N}$ に対して $E[X_n] = 0$ と仮定してよい。実際、$X_n - E[X_n]$ を $X_n$ とみなせばよい。$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \frac{1}{n} S_n$ と書くこととする。

1st step $\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=N}^\infty \{|Y_n| < \varepsilon\}$$

とおき、

$$P(A(\varepsilon)) = 1 \tag{5.10}$$

が示されれば、定理の主張が示される。実際、$A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$ とおけば、(5.10) より各 $j=1,2,\ldots$ について $P(A(1/j))=1$ だから、$P(A)=1$. ここで、$\omega\in A$ とすると、任意の $j\in\boldsymbol{N}$ に対して $\omega\in A(1/j)$ だから $N=N(\omega,j)$ が存在して $n\geq N$ ならば $|Y_n(\omega)|<1/j$ である。したがって、$\omega\in A$ ならば $\lim_{n\to\infty}Y_n(\omega)=0$ となり、証明は完了する。

2nd step　(5.10) を示す。そのために

$$B_m(\varepsilon)=\bigcup_{n=2^{m-1}}^{2^m-1}\{|Y_n|\geq\varepsilon\}=\left\{\max_{2^{m-1}\leq n<2^m}|Y_n|\geq\varepsilon\right\}$$

とおく。このとき、$\forall l\in\boldsymbol{N}$ に対して

$$A(\varepsilon)^{\mathrm{c}}=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|Y_n|\geq\varepsilon\}\subset\bigcup_{m=l}^{\infty}B_m(\varepsilon)\tag{5.11}$$

だから、(5.10), すなわち $P(A(\varepsilon)^{\mathrm{c}})=0$ を示すためには

$$\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m(\varepsilon))<\infty\tag{5.12}$$

を示せばよい。実際、Borel-Cantelli の定理 (1) により $P\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{m=l}^{\infty}B_m(\varepsilon)\right)=0$ であるが、(5.11) より $A(\varepsilon)^{\mathrm{c}}\subset\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{m=l}^{\infty}B_m(\varepsilon)$ となるから従う。

3rd step　(5.12) を示すため、$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j(=nY_n)$ として、

$$\begin{aligned}P(B_m(\varepsilon))&=P\left(\max_{2^{m-1}\leq k<2^m}\frac{1}{k}|S_k|\geq\varepsilon\right)\leq P\left(\max_{2^{m-1}\leq k<2^m}|S_k|\geq\varepsilon2^{m-1}\right)\\&\leq P\left(\max_{1\leq k\leq2^m}|S_k|\geq\varepsilon2^{m-1}\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2 2^{2m-2}}\sum_{k=1}^{2^m}V(X_k)\end{aligned}$$

ただし 1 行目の不等号では $2^{m-1}\leq k$ を、最後の不等号は Kolmogorov の不等式 (定理 5.9) を用いた。したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m(\varepsilon))&\leq\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=1}^{2^m}V(X_k)=\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}1_{[1,2^m]}(k)V(X_k)\\&=\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}V(X_k)\sum_{m=1}^{\infty}1_{[k,\infty)}(2^m)\frac{1}{2^{2m}}=\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}V(X_k)\sum_{m=m_k}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\leq\frac{16}{3\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}V(X_k)\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

ただし $m_k\in\boldsymbol{N}$ は $2^{m_k-1}<k\leq2^{m_k}$ となるようにとる。2 行目の不等号は

$$\sum_{m=m_k}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}=\frac{1/2^{2m_k}}{1-1/4}=\frac{4}{3}\frac{1}{(2^{m_k})^2}\leq\frac{4}{3}\frac{1}{k^2}$$

となることを用いた。よって、仮定 (5.9) より (5.12) が示された。　□

$\{X_n\}$ の分布が同じならば、定理 5.23 の仮定 (5.9)、特に $E[X_n^2]<\infty$ は不要になる。

**定理 5.24 (Kolmogorov の第 2 定理)**　$X_1,X_2,\ldots$ は *i.i.d.* で、$E[|X_1|]<\infty$ とする。このとき、大数の強法則が成立、すなわち、$\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$ は $E[X_1]$ に概収束する。

**証明:** $\forall n \in \boldsymbol{N}$ に対して $E[X_n]=0$ と仮定してよい。$X$ を $X_n$ と共通の分布をもつ確率変数とし、その分布関数を $F_X$ と書く。

<u>1st step</u>（番号 $k$ に依存した cut-off の導入）$Z_k = X_k 1_{(0,k]}(|X_k|) - \tilde{m}_k$, $\tilde{m}_k = E[X_k 1_{(0,k]}(|X_k|)]$ とおくと、$\{Z_k\}$ は定理 5.23 の仮定を満たす。実際、$\{Z_k\}$ は独立であり、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} V(Z_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (E[(X_k 1_{(0,k]}(|X_k|))^2] - \tilde{m}_k^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E[X_k^2 1_{(0,k]}(|X_k|)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{k} E[X^2 1_{(j-1,j]}(|X|)] = \sum_{j=1}^{\infty} E[X^2 1_{(j-1,j]}(|X|)] \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\leq E[X^2 1_{(0,1]}(|X|)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=2}^{\infty} E[X^2 1_{(j-1,j]}(|X|)] \frac{1}{j-1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=2}^{\infty} 2E[|X| 1_{(j-1,j]}(|X|)] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2E[|X|] < \infty
\end{aligned}$$

となる。ここで 3 行目の不等号は

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{j-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{j-1},$$

4 行目の最初の不等号は $j \geq 2$ のとき $j-1 < |x| \leq j$ であれば

$$x^2 \frac{1}{j-1} = |x| \frac{|x|}{j-1} \leq |x| \frac{j}{j-1} \leq 2|x|$$

となることを用いた。したがって、$E[Z_k]=0$ だから定理 5.23 から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0 \quad \text{a.s.}$$

が示された。

<u>2nd step</u> $|X 1_{(0,k]}(X)| \leq |X|$ $(\forall k \in \boldsymbol{N})$ で $E[|X|] < \infty$ なので、Lebesgue の収束定理により

$$\tilde{m}_k = E[X 1_{(0,k]}(|X|)] \to E[X] = 0 \quad (k \to \infty)$$

がわかる。したがって、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_k = 0$ となり ($cf.$ 演習問題 **6(1)**)、1st step により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{(0,k]}(|X_k|) = 0 \quad \text{a.s.}$$

<u>3rd step</u> $P(\#\{k \in \boldsymbol{N}; |X_k| > k\} < \infty) = 1$ を示す。これがいえれば、a.a. $\omega$ に対して有限個の $k$ を除いて $X_k = X_k 1_{(0,k]}(|X_k|)$ だから 2nd step から結論が得られる。そこで、まず

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k| > k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} P(j < |X| \leq j+1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} P(j < |X| \leq j+1) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j P(j < |X| \leq j+1) = E\left[\sum_{j=1}^{\infty} j 1_{(j,j+1]}(|X|)\right] \leq E[|X|] < \infty
\end{aligned}$$

に注意する。ただし、2 行目の一つ目の不等号は $\sum_{j=1}^{\infty} j 1_{(j,j+1]}(|x|) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x| 1_{(j,j+1]}(|x|) = |x|$ となることを用いた。よって、Borel-Cantelli の定理 (1) から $\#\{k; |X_k| > k\} < \infty$ a.s. がいえた。 $\square$

**注意 5.25** (1) $X_1, X_2, \dots$ は i.i.d. で $E[X_1^4] < \infty$ を満たすときには、大数の強法則の証明は比較的容易である (演習問題 **11**)。
(2) 定理 5.24 は $X_1, X_2, \dots$ が組ごとに独立であれば成立することが知られている。(*cf*. 演習問題の文献表 [D] pp.73–75.) ここでは、*Kolmogorov* の不等式などマルチンゲール理論につながる考え方があるためこの証明法を用いた。

**定理 5.26** $X_1, X_2, \dots$ は *i.i.d.* で $E[|X_1|] = \infty$ となるとき、

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| = \infty\right) = 1. \tag{5.13}$$

**証明:** $X$ を $X_n$ と同じ分布をもつ確率変数とする。
<u>1st step</u> $M > 0$ とし、$B_n^M = \{|X_n| \geq Mn\}$ とすると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} P(B_n^M) = \sum_{n=0}^{\infty} P(|X| \geq Mn) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(Mk \leq |X| < M(k+1)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} P(Mk \leq |X| < M(k+1)) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P\Big(k \leq \frac{|X|}{M} < k+1\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} E\Big[(k+1)1_{\{k \leq \frac{|X|}{M} < k+1\}}\Big] \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} E\Big[\frac{|X|}{M}1_{\{k \leq \frac{|X|}{M} < k+1\}}\Big] = E\Big[\frac{|X|}{M}\Big] = \frac{E[|X|]}{M} = \infty.
\end{aligned}$$

ここで、2 行目の二つ目の等号は $P(Mk \leq |X| < M(k+1))$ が $n$ によらないことを用いた。
<u>2nd step</u> $\{B_n^M\}$ は独立な事象の列だから Borel-Cantelli の定理 (2) により $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k^M\right) = 1$ であり、よって $P\left(\bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k^M\right) = 1$. $\omega \in \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$ とすると、$\forall M, n \in \boldsymbol{N}$ に対してある $k \geq n$ があって $\omega \in B_k^M$、i.e., $\frac{|X_k(\omega)|}{k} \geq M$ となるから、

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n(\omega)|}{n} \geq M.$$

これが、$\forall M \in \boldsymbol{N}$ に対して成り立つので、$\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n(\omega)|}{n} = \infty$, 即ち、

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1. \tag{5.14}$$

<u>3rd step</u> まず、数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n} < \infty$$

となることに注意する。これは、

$$|a_n| = |(a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1})| \leq |a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n| + |a_1 + \cdots + a_{n-1}|$$

となることからすぐにわかる。この対偶を $a_n = X_n(\omega)$ に対して用いると、

$$\Big\{\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{n} = \infty\Big\} \subset \Big\{\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| = \infty\Big\}$$

となり、(5.14) とあわせ (5.13) が成り立つことがわかった。 □

**注意 5.27** 演習問題 **9**(1) の例は大数の弱法則を満たすが、$E[|X_1|] = \infty$ となるため定理 5.26 より大数の強法則を満たさない。