確率統計の話題から ―条件つき確率の話題を中心に―

杉浦　誠

平成 23 年 8 月 25 日 (2011 年 9 月 6 日修正)

1　確率を計算しよう

この節では具体的に確率や平均などを計算することで、直感と計算の結果の違いを比較してみましょう。

例題 1.1 (誕生日) *40* 人のクラスで、同じ誕生日の生徒はいるでしょうか。その確率を求めてみましょう。ただし、簡単のため *1* 年は *365* 日とし、*365* 日のどの日に生まれる確率も等しく $\dfrac{1}{365}$ であると仮定します。[*1]

確率を $\dfrac{40}{365} \fallingdotseq 0.1096$ とするのはもちろん誤りです。正しい解答を見てみましょう。

解答: 余事象を考え、まず 40 人の誕生日がすべて異なる確率 q を求める。

40 人を順に比較していくという方針をとる。

まず、2 人の誕生日が異なる確率は、2 人目が 1 人目と誕生日が異なればよいので $\dfrac{364}{365}$.

次に、3 人目が 1 人目, 2 人目と誕生日が異なる確率は $\dfrac{363}{365}$ であるから、3 人の誕生日が異なる確率は $\dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365}$ となる。同様に、4 人の誕生日が異なる確率を求めると $\dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365} \times \dfrac{362}{365}$.

これを繰り返し、$q = \dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365} \times \cdots \times \dfrac{326}{365} = 0.108768\cdots$ となる[*2] 。

以上より、求める確率は $1 - q \fallingdotseq 0.8912$ である。　□

問 1.1 次の場合に *5* 人の誕生日がすべて異なる月となる確率を考える。

(1) どの月に生まれる確率も等しく $\dfrac{1}{12}$ である場合に、*5* 人の誕生日がすべて異なる月となる確率を求めよ。

(2) 2 月以外の *11* ヶ月に誕生日がある確率を p, *2* 月にある確率を $1 - 11p$ とする。ただし、$0 < p < \dfrac{1}{11}$ とする。このとき、*5* 人の誕生日がすべて異なる月となる確率 $f(p)$ と、$f(p)$ が最大となる p の値を求めよ。

問 1.2 次のようなサイコロを *3* 回投げたとき、*3* 回とも異なる目が出る確率を求めよ。

(1) どの目の出る確率も等しく $\dfrac{1}{6}$ の場合。

(2) 1 と *6* の目の出る確率が $\dfrac{1}{7}$, そのほかの目が出る確率が $\dfrac{5}{28}$ の場合。

1654 年のある日、フランスの数学者パスカルは、ド・メレという貴族から、ある質問を受けた。その質問とは次のような問題であった。パスカルは、この問題を同じ数学者のフェルマーと手紙をやり取りして研究し、その結果生まれたのが、「確率論」という分野である[*3]。

[*1] 実際には季節などによって生まれる確率が異なるので、同じ誕生日の人がいる確率はこれより高くなる (*cf*. 問 1.1, 問 1.2)。

[*2] これを求めるのは電卓では大変です。たとえば、$364 \times 363 \times \cdots \times 325 \fallingdotseq 9.2 \times 10^{98}$ です。

[*3] 現在の確率論はルベーグ積分論を用いて定式化された。これはロシアの数学者コルモゴロフによってなされた (*cf*. [9])。[9] は統計学に関わる人物の業績をその人となりとあわせて (数学的な記述はなく) 書かれいる楽しい本です。

例題 1.2 (ド・メレからパスカルへの質問) 同額の賭け金を出し合い、先に *3* 勝したほうが勝ちとするゲームで、時間の関係で途中でやめることになった。その時点で私が *2* 勝 *1* 敗で勝っていたのだが、賭け金の分配方法がよくわからなかった。結局私が *3* 分の *2*、相手が *3* 分の *1* ということにしたのだが、これでよかったのだろうか。

解答: ここでは両者の勝つ確率は等しいと仮定しよう。実際は「私」がリードしているので実力差があると仮定してもよいかもしれないがやめておく[*4]。

このゲームは 5 試合やれば必ず勝負がつくので、この勝負の残り 2 試合をしたとするとゲームの勝敗は以下の表のようになる。ただし、「私」の勝ちを W, 負けを L で表し、現在までの勝敗は 2 勝 1 敗なので順序を考えないとし「(WWL)」と表す。

現在までの勝敗		4 回戦	5 回戦	勝者
(WWL)	→	W	W	私
(WWL)	→	W	L	私
(WWL)	→	L	W	私
(WWL)	→	L	L	相手

2 人の実力は同じという前提なので、この 4 つの場合はどれも $\dfrac{1}{4}$ で起こる (このため途中で勝敗が決まる場合も最後まで書いた)。つまり、「私」は確率 $\dfrac{3}{4}$ で勝者のなったはずであるので、したがって賭け金もその割合で配分されなくてはならない。正しい配分は「私」が $\dfrac{3}{4}$, 相手が $\dfrac{1}{4}$ の賭け金を取るべきとなる。 □

問 1.3 A 氏と B 氏が同額の賭け金を出し合い、先に *5* 勝したほうが勝ちとするゲームを行い、時間の関係で途中でやめることになった。賭け金を両者それぞれの勝つ確率にしたがって配分するとき、次の場合に A 氏が受け取るべき賭け金の割合を決定せよ。ただし、*2* 人の実力は同じとして考えよ。

(1) その時点で A 氏が *4* 勝 *2* 敗で勝っていた場合

(2) その時点で A 氏が *3* 勝 *2* 敗で勝っていた場合

問 1.4 (ド・メレの 2 つのサイコロ) ド・メレは次のような *(1), (2)* の賭けを行ったところ、*(1)* では勝てることが多かったが、*(2)* では損をよくした。

(1) *1* つのサイコロを *4* 回投げて、*1* 回でも *6* の目が出れば自分の勝ち。

(2) *2* つのサイコロを同時に *24* 回投げて、*1* 回でも *2* つとも *6* の目が出れば自分の勝ち。

それぞれの賭けに勝てる確率を求めることで、原因を調べよ。また、*(2)* の賭けでは何回以上投げることにすれば勝てる確率が 0.5 より大きくなるか求めよ。

確率論における重要な定理に「大数の法則」がある。これはヤコブ・ベルヌイ (1654–1705) によって紹介された。「大数の法則」とは、簡単に言えば、「個々の事象の予測は無理 (もしくは極めて困難) であっても、充分に多くの試行がなされると仮定するなら、全体像はかなり正確に予想しうる」とする法則である。式で書くと、繰り返し同じ試行を行うとき、その結果の列を $X_1, X_2, \ldots$ とすると、ある定数 c があって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = c$$

となる[*5]。この c は X_1 の平均と一致する。この定理の厳密な証明はコルモゴロフによってなされた。

[*4] この「私」が勝つ確率を調べるというのが統計学の役割である。この場合**百分率に関する区間推定の精密法** ($cf.$ [8]) を使って区間推定を行うと「私」の勝つ確率 p は 90% の確率で $[0.135, 0.983]$ の範囲にあることがわかる。したがって、「両者の勝つ確率は等しい」という仮説は間違いとは言えないこととなる。

[*5] ここでは収束の意味を説明しない。詳しくは、確率統計学の教科書、例えば [2] を見よ。[2] はエッセイ的なところもあって、確率統計に関する読み物としても楽しめる本です。

ギャンブル産業が成立するのはこの定理に保証されているといえる (cf. [11])。というのは、胴元が有利な賭けにおいては、数回の賭けでは損をすることがあっても、1 月, 1 年という長い期間を見ればかならず一定割合が収益として計算できからである。それを次の例題で見てみよう。

例題 1.3 ルーレットで赤か黒に賭けて勝つ確率は、どちらも $\dfrac{18}{38}$ であるとする。このルーレットにチップを *1* 枚ずつ賭け、*90* 枚持っているチップを *100* 枚に増やしたい。*100* 枚になるか、*0* 枚になるかまで続けるものとする。*100* 枚に到達する確率を求めよ。

解答: 1 回の賭けで勝つ確率を $p(=\dfrac{9}{19})$, 負ける確率を $q=1-p$ とし、目標とする枚数を $N(=100)$ とかく。また、k 枚のチップを持っている人が目標枚数 N 枚に達する確率を a_k とする。

まず、一回の賭けで確率がどう変わるかを考えると

$$k\text{ 枚}\quad \begin{array}{c}\text{勝つ}\\ \nearrow\\ \\ \searrow\\ \text{負ける}\end{array}\quad \begin{array}{ll} k+1\text{ 枚} & \text{ここから勝つ確率は } a_{k+1}\\ k-1\text{ 枚} & \text{ここから勝つ確率は } a_{k-1}\end{array}$$

これより、1 回の賭けに勝つ確率は p であったから、

最初に勝って、それから最終的に勝つ確率 $= p\times a_{k+1}$

最初に負けて、それから最終的に勝つ確率 $= q\times a_{k-1}$

となる。よって、最初の賭けは勝ちか負けしかないから、漸化式

$$a_k = p\,a_{k+1} + q\,a_{k-1} \tag{1.1}$$

を得る。一方、所持金がなくなればもう賭けをすることができないから、N 枚に到達できないので $a_0=0$, N 枚に達したらこれ以上賭けをしなければよいので $a_N=1$ となる。

では、この漸化式を解こう。まず、$x=px^2+q$ について、$(px-q)(x-1)=0$ と変形できるので $x=\dfrac{q}{p}, 1$. ($p\neq\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{q}{p}=\dfrac{1-p}{p}\neq 1$ となることに注意する。) これを踏まえ、漸化式を

$$a_{k+1}-a_k=\frac{q}{p}(a_k-a_{k-1})\text{と変形し、}a_{k+1}-a_k=\left(\frac{q}{p}\right)^k(a_1-a_0)=\left(\frac{q}{p}\right)^k a_1$$
$$a_{k+1}-\frac{q}{p}a_k=a_k-\frac{q}{p}a_{k-1}\text{と変形し、}a_{k+1}-\frac{q}{p}a_k=a_1-\frac{q}{p}a_0=a_1\qquad\text{を得る。}$$

上式の最後の等号は $a_0=0$ を用いた。これより、

$$\left(-1+\frac{q}{p}\right)a_k=\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^k-1\right\}a_1$$

を得る。ここで、$k=N$ とし、$a_N=1$ を用いると、$-1+\dfrac{q}{p}=\left\{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N-1\right\}a_1$. これより a_1 を求め、代入することで、

$$a_k=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N-1}$$

を得る[*6]。以上より、$\dfrac{q}{p}=\dfrac{10}{9}$ で $k=90$ のときだから、求める確率は $\dfrac{\left(\frac{10}{9}\right)^{90}-1}{\left(\frac{10}{9}\right)^{100}-1}\fallingdotseq 0.34866$ となる。[*7] □

[*6] もし $p=\frac{1}{2}$ であれば、(1.1) を変形すると、$a_{k+1}-a_k=a_k-a_{k-1}=\cdots=a_1-a_0$ となるので、$a_k=k(a_1-a_0)$. ここで $a_N=1$, $a_0=0$ を代入して、$a_k=\frac{k}{N}$ となる。

[*7] 90 枚持っているチップをもっている人が、100 枚になるか 0 枚になるかまで賭けを続けるとき、その賭けの平均回数は約 1047.5 回となる。これは、k 枚のチップを持っている人の N 枚か 0 枚に達するまでの賭けの平均回数を t_k とすると、その漸化式が

この場合は、10 枚のチップを一度に賭けるのが一番よい戦略である。賭けを行う回数を増やすほど、N 枚に到達できる確率は減ってしまう。ちなみに、この例題の方法で 900 枚のチップを 0 枚になる前に 1000 枚にまで増やせる確率を計算すると $\dfrac{\left(\frac{10}{9}\right)^{900}-1}{\left(\frac{10}{9}\right)^{1000}-1} \fallingdotseq \left(\dfrac{10}{9}\right)^{-100} = 0.0000265614\cdots$ となる。

2 条件つき確率とベイズの定理

この節では条件つき確率を導入して、いろいろな例を計算してみます。特に、最近様々に応用されているベイズの定理について考えましょう[*8]。

定義 2.1 事象 A, B について、事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件つき確率 $P_A(B)$ を次で定義する。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ただし、$P(A) > 0$ の場合のみに定義するものとする。[*9]

例 2.1 (シンプソンのパラドックス) A 高校と B 高校からそれぞれ 40 人を選び国語と数学のどちらが好きか調査したところ、左の表のような結果を得た。ここで、事象 A, B はそれぞれ生徒が A 高校, B 高校に属するという事象を、事象 R は国語より数学が好きという事象、事象 $\overline{R}$ は数学より国語が好きという事象を表す。このとき、A 高校で国語より数学が好きという生徒の割合は $20/40 = 0.5$ となる。一方、B 高校では $16/40 = 0.4$ となる。これより、A 高校のほうが B 高校より国語より数学が好きという生徒の割合が多いことがわかる。

	R	$\overline{R}$	計
A	20	20	40
B	16	24	40
計	36	44	80

ところが、ある先生が性別によって結果が異なるかも知れないと、性別を考慮してデータを見たところ、左の表のような結果を得た。このとき、男子 (M) について、国語より数学が好きという生徒の割合は A 高校では $18/30 = 0.6$, B 高校では $7/10 = 0.7$ であり、女子 (F) についての割合は A 高校では $2/10 = 0.2$, B 高校では $9/30 = 0.3$ となる。つまり、男子であれ女子であれ、B 高校のほうが A 高校より国語より数学が好きという生徒の割合が多いことがわかる。

	R_M	$\overline{R}_M$	M小計	R_F	$\overline{R}_F$	F小計	計
A	18	12	30	2	8	10	40
B	7	3	10	9	21	30	40
計	25	15	40	11	29	40	80

このように全体の傾向が、新しい要因を組み込んだとき全面的に否定されてしまうような結果を得ることをシンプソンのパラドックスという (*cf*. [12]) [*10]。

これを条件つき確率の記号で表すと次のようになる。

$t_k = p(t_{k+1}+1) + q(t_{k-1}+1)$, $t_0 = t_N = 0$, となることから従う。
実際、$s_k = t_{k+1} - t_k$ とすると、漸化式は $s_{k+1} = \frac{q}{p}s_k - \frac{1}{p}$, $s_1 = t_1 - t_0$ となり、これは、$s_k = (t_1 - t_0 - \frac{1}{q-p})(\frac{q}{p})^k + \frac{1}{q-p}$ と解ける。よって、$t_n = \sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) + t_0 = (t_1 - t_0 - \frac{1}{q-p})\frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)-1} + \frac{1}{q-p} + t_0$ となるが、$t_0 = t_N = 0$ より、t_1 を定めることで、$t_k = \frac{k}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{(q/p)^k - 1}{(q/p)^N - 1}$ となることがわかる。これに数値を代入すればよい。

[*8] コンピューターの分野においては Mozilla Thunderbird は迷惑メールの判定にベイズの定理を使用している (wikipedia より)。CNET JAPAN の 2003/3/10 の記事に「グーグル、インテル、MS が注目するベイズ理論」がある。経済分野では [6] で、ゲームの理論と関連させた興味深い結果を見ることができる。ベイズ推定を実際に活用するためには複雑な計算を伴う。このため、計算機の発達もベイズ理論を利用ために必要であった (*cf*. [4])。

[*9] 通常は $P(B|A)$ と表します。少なくとも私は高校教科書やその参考書以外で $P_A(B)$ の記号は見たことがありません。この講義は、中学高校の数学教員を対象として行うため $P_A(B)$ を用います。(つい $P(B|A)$ のように板書してしまっても、$P_A(B)$ の意味と解釈してください。) また、A の余事象は A^c を用い、$\overline{A}$ は A の closure (A を含む最小の閉集合) を表すことが通例です。

[*10] 相関係数についても同様に、全体で見ると正の相関を示すが、部分で見るとどちらも負の相関を示すことがある (*cf*. [10])。本来これをシンプソンのパラドックスという。

A, B をそれぞれ選んだ生徒が A 高校, B 高校の生徒であるという事象、R を国語より数学が好きであるという事象とすると、前半の表より

$$P_A(R) = \frac{20}{40} = 0.5, \quad P_B(R) = \frac{16}{40} = 0.4, \qquad \text{よって} \quad P_A(R) > P_B(R).$$

後半は、それにその生徒が男子であるという事象 M と女子であるという事象 B 組み込むと、

$$P_{A\cap M}(R) = \frac{18}{30} = 0.6, \quad P_{B\cap M}(R) = \frac{2}{10} = 0.2, \qquad \text{よって} \quad P_{A\cap M}(R) < P_{B\cap M}(R),$$
$$P_{A\cap F}(R) = \frac{7}{10} = 0.7, \quad P_{B\cap F}(R) = \frac{9}{30} = 0.3, \qquad \text{よって} \quad P_{A\cap F}(R) < P_{B\cap F}(R)$$

と表される。このように条件つき確率は直感が働かないことが多い。

条件つき確率の性質をいくつか調べよう。

$P_A(\cdot)$ は全事象を A に制限した確率とみなせる。また、$P_A(U) = P_A(A) = 1$ (U は全事象), $P_A(\emptyset) = 0$ であり、事象 B, C が排反 ($B \cap C = \emptyset$) なら

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$$

となる。また、次の乗法定理が成立する。証明は定義より明らかであろう。

定理 2.2 (乗法定理) *2* つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

定理 2.3 (ベイズの定理) A および $C_1, C_2, \cdots, C_n$ は事象であり、全事象 U に対して

$$C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = U \qquad C_i \cap C_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

を満たすとする。このとき、

$$P_A(C_i) = \frac{P(C_i)P_{C_i}(A)}{P(C_1)P_{C_1}(A) + P(C_2)P_{C_2}(A) + \cdots + P(C_n)P_{C_n}(A)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.1}$$

が成立する。特に B を事象とし、$n = 2,\ C_1 = B,\ C_2 = \overline{B}$ *(*B の余事象*)* とすると次のようになる。

$$P_A(B) = \frac{P(B)P_B(A)}{P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)} \tag{2.2}$$

証明: 乗法公式により $P(C_i)P_{C_i}(A) = P(C_i \cap A)$. また、

$$\begin{aligned} P(C_1)P_{C_1}(A) + P(C_2)P_{C_2}(A) + \cdots + P(C_n)P_{C_n}(A) &= P(C_1 \cap A) + P(C_2 \cap A) + \cdots + P(C_n \cap A) \\ &= P(A) \end{aligned}$$

第 2 の等号は $(C_i \cap A) \cap (C_j \cap A) = \emptyset \ (i \neq j)$ と $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = U$ を用いた。よって、これを (2.1) の右辺に代入することで主張を得る。　□

まず、次のような例題を考えましょう。

例題 2.2 ある病原菌の検査試薬は、病原菌がいるのに誤って陰性と判断する確率が *1%,* 病原菌がいないのに誤って陽性と判断する確率が *2%* である。全体の *1%* がこの病原菌に感染している集団から *1* つの個体を取り出す。この検査結果が陽性だったときに、実際には病原菌に感染していない確率を求めよ。[*11]

[*11] 実際の検診の例では、乳がん検診でのマンモグラフィーにおいて、乳がんなのに誤って陰性とすることは (ほとんど) ないが、乳がんでないのに誤って陽性とする確率が 9% で、40 歳代での罹病率は 0.3% だそうである (NHK ためしてガッテン、数字トリック見破り術、2011 年 7 月 6 日放送から)。

解答: 取り出した個体が感染しているという事象を A, 検査結果は陽性であるという事象を E とする。このとき、与えられた条件を式にすると次のようになる。

$$P_A(\overline{E}) = 0.01, \quad P_{\overline{A}}(E) = 0.02, \quad P(A) = 0.01$$

求めるべきは $P_E(\overline{A})$ である。$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.99$ より、

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(\overline{A} \cap E) = P(A)P_A(E) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E) \\ &= 0.01 \times (1 - 0.01) + 0.99 \times 0.02 = 0.99 \times 0.03 \end{aligned}$$

よって、$P_E(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0.99 \times 0.02}{0.99 \times 0.03} = \dfrac{2}{3}$ となる。[*12] □

問 2.1 ある製品を製造する *2* つの工場 A,B があり、A 工場の製品には *3%,* B 工場の製品には *4%* の不良品が含まれているとする。A 工場の製品と B 工場の製品を、$4:5$ の割合で混ぜた大量の製品の中から *1* 個を取り出す。それが不良品であったときに、A 工場の製品である確率を求めよ。

問 2.2 ある工場では、機械 M_1, M_2, M_3 で全製品のそれぞれ *60%, 30%, 10%* を製造していて、これらの機械で生じる不良品の割合は *2%, 3%, 6%* である。いま、*1* 個の不良品が見つかったとき、それが機械 M_3 で製造されたものである確率を求めよ。

例題 2.3 (3 囚人問題) *3* 人の囚人 A, B, C がいる。*1* 人が恩赦になって釈放され、残り *2* 人が処刑されることがわかっている。誰が恩赦になるか知っている看守に対し、A が「B と C のうち少なくとも *1* 人処刑されるのは確実なのだから、*2* 人のうち処刑される *1* 人の名前を教えてくれても私についての情報を与えていることにはならないだろう。*1* 人を教えてくれないか。」と頼んだ。看守は A の言い分に納得して「B は処刑される。」と答えた。それを聞いた A は「これで釈放されるのは自分と C だけになったので、自分の助かる確率は 1/3 から 1/2 に増えた。」といって喜んだ。実際には、この答えを聞いたあと、A の釈放される確率はいくらになるか。

解答: A, B, C をそれぞれ囚人 A, B, C が恩赦される事象とすると、A, B, C が恩赦される確率は等しいと考えられるので、$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$ となる。
次に、F で看守が「B は処刑される」と告げる事象をあらわすと、
もし A が恩赦されるのであれば、看守は B, C のどちらと告げてもよいので $P_A(F) = \dfrac{1}{2}$.
もし B が恩赦されるのであれば、看守が「B は処刑される」と告げる可能性はないので、$P_B(F) = 0$.
もし C が恩赦されるのであれば、看守は必ず「B は処刑される」と告げるので、$P_C(F) = 1$.
よって、求める確率は $P_F(A)$ であるから、ベイズの定理を用いて

$$P_F(A) = \frac{P(A)P_A(F)}{P(A)P_A(F) + P(B)P_B(F) + P(C)P_C(F)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{3}$$

となる。 □

これは、冷静に考えれば明らかと思えるだろう。これと同型の次の問題を考えてみよう。

[*12] ここで、集団を「全体の 1/2000 がこの病原菌に感染している」と取りかえると $P_E(\overline{A}) = 0.9758\cdots$ となる。
これは、世間一般の水準からいえばめったにない強い証拠に見えても、極めて珍しいことに比べれば頻繁に起こるに過ぎない場合、頻繁に起こりうる結果をもってより珍しい原因の証拠とはできないことを意味している。例えば殺人事件において、血液型の一致が主な証拠での冤罪事件がこれにあたるであろう。証拠自体がどれほどしっかりしていても、偶然証拠に合致する無実の人にいきあたる確率のほうが犯罪者に出会う確率よりはるかに大きいからである。とくに珍しい事件に対してはそれを上回るまれな事実でないと証拠にならないことを肝に銘じて、危険な偏見を避けるべきである。また、「大地震の前兆として起こる現象」とされているものの多くはこれに相当するのではないだろうか (*cf.* [2])。

例題 2.4 (3 ドア問題, モンティ・ホールのジレンマ) *3* つの扉のうち 1 つだけに賞品が入っていて、回答者はそれを当てたら賞品がもらえる。ただし扉は次のように *2* 段階で選ぶことができる。

1. まず回答者は *3* つの扉からどれか *1* つを選ぶ、

2. 次に、答を知っている司会者が、選んでいない扉で賞品の入っていない扉 *1* つを開けてみせる。ただし、回答者が当たりの扉を選んでいる場合は、残りの扉からランダムに *1* つを選んで開けるとする。このあと回答者は扉を *1* 回選び直してもよい。

2 で扉を換えるのと換えないのと、どちらが当る確率が高いか？

解答: 扉を A, B, C とし、回答者が選んだ扉を A とし、司会者が選んで開けた扉が B だったとする。
A, B, C でそれぞれ A, B, C の扉に賞品があるという事象とし、司会者が B の扉を開けるという事象を S とすると、3 囚人問題の場合と全く同様に $P_S(A) = 1/3$, $P_S(C) = 2/3$ となる。よって、扉を換えるほうが当る確率が高い。[*13] □

問 2.3 例題 *2.4* で扉が A, B, C, D, E の *5* つの扉のうち 1 つだけに賞品が入っていている場合を考える。回答者が選んだ扉が A であり、次の *(1), (2)* のように司会者が扉を選んで開けたとする。このとき、賞品が C にある *(*事後*)* 確率を計算せよ。ただし、司会者は回答者が選んでいない扉で賞品が入っていないものからランダムに選んで開けるものとする。

(1) 司会者が B の扉を開けたとき。

(2) 司会者が B と E の扉を開けたとき。

例題 2.4 において、最初は C の扉に賞品がある確率が $P(C) = \dfrac{1}{3}$ ということから、司会者が B の扉を開けるという新たな情報が加わったことにより、C の扉に賞品がある確率は $P_S(C) = \dfrac{2}{3}$ となった。このように試行を行う前の判断の確率 $P(C)$ を**事前確率**, 試行を行った結果の条件の下での判断の確率 $P_S(C)$ を**事後確率**という。ベイズの定理は事前確率から事後確率を導く公式と考えられる。[*14]

次に変形 3 囚人問題を考える ([5] に詳しい)。これは更に直感と異なる結果となる。

例題 2.5 (変形 3 囚人問題) *3* 人の囚人 A, B, C がいて、*2* 人が処刑され *1* 人が釈放されることがわかっている。釈放される確率は、A, B, C それぞれが 1/4, 1/4, 1/2 であった。誰が釈放されるか知っている看守に対し、A が「B と C のうち少なくとも *1* 人処刑されるのは確実なのだから、*2* 人のうち処刑される *1* 人の名前を教えてくれても私の釈放についての情報を与えていることにはならないだろう。*1* 人を教えてくれないか。」と頼んだ。看守は A の言い分に納得して「B は処刑される。」と答えた。この答えを聞いたあと、A の釈放される確率はいくらになるか。

解答: 例題 2.3 と同じ記号を用いると、事前分布は $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(C) = \dfrac{1}{2}$ となる。
また、F で看守が「B は処刑される」と告げる事象をあらわすと、$P_A(F) = \dfrac{1}{2}$, $P_B(F) = 0$, $P_C(F) = 1$.
よって、求める確率は $P_F(A)$ であるから、ベイズの定理を用いて

$$P_F(A) = \frac{P(A)P_A(F)}{P(A)P_A(F) + P(B)P_B(F) + P(C)P_C(F)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1} = \frac{1}{5}$$

となる。 □

[*13] [5] によると、2 つのドアの賞品のある確率は 1/2 ずつであると考えてしまう人が、ほとんどで、更に、「確率が同じなら、最初に選んだほうを選び続けるほうがいい」と多くの人は考える。これはわざわざ変えてはずれるほうが、悔いが残るということのようである。実際に実験的検討がなされ「選ぶドアを変えない」という回答者が圧倒的に多くなるとあった。

[*14] 現実の問題において、事前確率をどのように設定するかはたいへん難しい問題である。また事前確率の概念そのものに設定者の主観が入り込む余地がある (主観主義) としての批判もある。

例題 2.3 では囚人 A が釈放される確率は 1/3 のままだから、「残った囚人は A と C だけで、もともとが釈放される確率の比は 1 : 2 だったから、1 を比例配分して 1/3 となる」と考えることも出来ると述べた。しかし、この場合では釈放される確率は 1/4 から 1/5 と減ってしまう。つまりこの推論は誤りだったことがわかる。

問 2.4 例題 *2.5* で *3* 人の囚人 A, B, C が釈放される事前確率がそれぞれが 1/4, 1/2, 1/4 であったとき、看守の答え「B は処刑される。」を聞いたあとの、A の釈放される確率はいくらになるか。また、事前確率が A, B, C それぞれが 1/2, 1/4, 1/4 であったときはどうか。

問 2.5 問 *2.3* と同様に A, B, C, D, E の *5* つの扉のうち 1 つだけに賞品が入っている場合を考える。ただし、扉 A, B, C, D, E に賞品が入っている事前確率は 1/6, 1/6, 1/6, 1/4, 1/4 であるとする。回答者が選んだ扉が A であり、次の *(1), (2)* のように司会者が扉を選んで開けたとする。このとき、賞品が A にある事後確率を計算せよ。ただし、司会者は回答者が選んでいない扉で賞品が入っていないものからランダムに選んで開けるものとする。

(1) 司会者が B の扉を開けたとき。

(2) 司会者が B と E の扉を開けたとき。

3 確率変数の平均と分散

確率変数の平均や分散の話題に移りましょう*15。

定義 3.1 確率変数 X の取りうる値を $a_1, a_2, \ldots, a_N$ とし、その確率分布が次のように与えられているとする。

X	a_1	a_2	$\cdots\cdots$	a_N	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_N	1

ここで、p_k は $X = a_k$ となる確率 $P(X = a_k)$ を表す。このとき、X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} a_k p_k, \quad V(X) = E[(X-m)^2] = \sum_{k=1}^{N} (a_k - m)^2 p_k$$

と定める。また、$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ を X の標準偏差という*16。X の取り得る値が *(*可算*)* 無限個ある場合も同様に定義される。

問 3.1 確率変数 X の確率分布が定義 *3.1* の表の場合に、

$$V(X) = E(X^2) - m^2$$

となることを示せ。たたし、$m = E(X)$, $E(X^2) = \sum_{k=1}^{N} {a_k}^2 p_k$ とする。

問 3.2 *2* 個のサイコロを投げるとき、出る目の最大値を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。*(*定義 *3.1* の表に相当する表をこの場合に書くことを意味します。*)*

(2) X の平均、分散、標準偏差を求めよ。

まず、クーポンコレクターの問題を考えよう。

*15 試行の結果として値の定まる変量を確率変数という。

*16 X の測定単位が例えば cm であるとき、平均は同じ cm となる。しかし、分散は cm^2 となってしまう。そこで、分散の非負の平方根である標準偏差を考えれば X の単位と一致させることができる。

例題 3.1 (クーポンコレクターの問題) おまけが 6 種類ある食玩をすべて集めたい。ただし、どの商品にどのおまけが入っているかは見分けられないようになっている。どのおまけも等確率で入っている場合、平均して何個買えば全種類集まるか。

これはすぐには解けないので、まず次の例題を考えます。

例題 3.2 勝つ確率が p $(0 < p < 1)$ である賭けを勝つまで続ける。このとき、初めて勝つまでに行った賭けの回数を表す確率変数を X とする。X の期待値を求めよ。

解答: 賭けに負ける確率を $q = 1 - p$ とかく。
まず、1 回目で勝つ場合は、確率は p, 即ち $P(X = 1) = p$ となる。
2 回目で初めて勝つ場合は 1 回目が負けで 2 回目が勝ちなので、$P(X = 2) = qp$ となる。
同様に、k 回目で初めて勝つ場合はその前の $k - 1$ 回はすべて負けなので、$P(X = k) = q^{k-1}p$ となる。
また、k のとり得る値は自然数全体となる。よって、確率変数 X の確率分布は、次のようになる。

X	1	2	3	$\cdots\cdots$	k	$\cdots\cdots$	計
P	p	qp	q^2p	$\cdots\cdots$	$q^{k-1}p$	$\cdots\cdots$	1

計が 1 となることは次のように無限等比級数の和の公式を用いてわかる。

$$p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{k-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

したがって、期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 1 \times p + 2 \times qp + 3 \times q^2p + \cdots + k \times q^{k-1}p + (k+1) \times q^k p + \cdots$$

となる。この無限和を求めるため、次のことに注意する。r が $0 < r < 1$ を満たすとすると、等比数列の和の公式により

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

となる。この両辺を r で微分すると

$$0 + 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + Nr^{N-1} = \frac{-(N+1)r^N(1-r) - (-1)(1 - r^{N+1})}{(1-r)^2} = \frac{1 - (N+1)r^N + Nr^{N+1}}{(1-r)^2}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{N\to\infty} Nr^N = 0$ となること[*17]に注意すると、

$$1 + 2r + 3r^2 + \cdots + Nr^{N-1} + \cdots = \frac{1}{(1-r)^2}$$

となる。ここで、$r = q$ とし、両辺を p 倍すれば、

$$E(X) = p + 2qp + 3q^2p + \cdots + kq^{k-1}p + \cdots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

を得る。　$\square$

例題 3.1 の解答: まず 1 個買えば最初の 1 種類目は手に入る。
2 種類目が手に入る確率は $\dfrac{5}{6}$ であるが、例題 3.2 を「(2 種類目が手に入る)=(賭けに勝つ)」と解釈すること

*17 二項定理を用いると次のように証明できる。$a = \frac{1}{r}$ とおく。$a > 1$ に注意し、二項定理を用いると $a^N = (1 + a - 1)^N = 1 + N(a-1) + \frac{N(N-1)}{2}(a-1)^2 + \cdots + (a-1)^N > \frac{N(N-1)}{2}(a-1)^2$. よって、$0 < Nr^N = \frac{N}{a^N} < \frac{2}{(N-1)(a-1)^2}$ となり、$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{2}{(N-1)(a-1)^2} = 0$ であるからはさみうちを用いればよい。

で、それを手に入れるまでの平均購入個数が $\dfrac{1}{\frac{5}{6}} = \dfrac{6}{5}$ となることがわかる。
同様に、3 種類目が手に入る確率は $\dfrac{4}{6}$ であるから、手に入れるまでの平均購入個数が $\dfrac{1}{\frac{4}{6}} = \dfrac{6}{4}$ となる。

これを 6 個目まで繰り返すと、6 種類全部を集めるには平均して

$$1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7 \quad (\text{個})$$

買うこととなる。　　□

同様に、N 種類ある食玩をすべて集めたければ、平均 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{N}{k}$ 個買えばよい。N が十分大きければ、これは $N(\log N + \gamma)$ で近似できる。ここで、γ はオイラーの定数 $\gamma = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \log N\Big)$ を表し、これは $\gamma = 0.57721566\cdots$ であることが知られてる。

例えば $N = 100$ のとき、おおよそ平均 $100(\log 100 + \gamma) \fallingdotseq 518.24$ 個買う必要があることがわかる。($cf.$ 数式処理ソフトを使って計算すると、$100\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k} \fallingdotseq 518.74$ となる。)

例題 3.3 おまけが A, B, C の *3* 種類ある食玩をすべて集めたい。ただし、どの商品にどのおまけが入っているかは見分けられないようになっている。おまけ A, B, C が入っている確率の比が 3 : 3 : 1 のとき、平均して何個買えば全種類集まるか。

解答: $p = \dfrac{3}{7}$, $q = \dfrac{1}{7}$ とおく。$2p + q = 1$ に注意する。まず 1 個買えば最初の 1 種類目は手に入る。
1 つ目が A または B のとき、2 種類目が手に入る確率は $1 - p = p + q$ であるから、例題 3.2 を用いて、手に入れるまでの平均購入個数は $\dfrac{1}{p+q}$ となる。1 つ目が C のとき、2 種類目が手に入る確率は $1 - q = 2p$ であるから、手に入れるまでの平均購入個数は $\dfrac{1}{2p}$ となる。
1 つ目, 2 つ目が A, B のとき、その確率は $2p \cdot \dfrac{p}{p+q}$ で、3 種類目が手に入る確率は $1 - 2p = q$ であるから、平均購入個数は $\dfrac{1}{q}$. 1 つ目が A または B で 2 つ目が C のとき、その確率は $2p \cdot \dfrac{q}{p+q}$, 1 つ目が C, 2 つ目が A または B のとき、その確率は $2q \cdot \dfrac{1}{2}$ で、これらの場合 3 種類目が手に入る確率は $1 - p - q = p$ であるから、平均購入個数は $\dfrac{1}{p}$ となる。
以上を足し合わせ、3 種類全部を集めるには平均して

$$1 + 2p \cdot \frac{1}{p+q} + q \cdot \frac{1}{2p} + 2p \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \frac{1}{q} + \Big(2p \cdot \frac{q}{p+q} + 2q \cdot \frac{1}{2}\Big) \cdot \frac{1}{p} = 8 \quad (\text{個})$$

買うこととなる。*18　　□

次に分散について考えましょう。分散は「X の値のばらつきがどの程度大きいか」を表す尺度です。それを次の例で見ましょう ($cf.$ [2])。

例題 3.4 (一列並びの効用) 駅で切符売り場に n 個の窓口がある。並び方として次の二つ方法がある。
- **並列並び** : 客は好きな窓口を勝手に選んで並ぶ。
- **一列並び** : すべての客はまず一列に並び、その列の先頭の客が最初に空いた窓口に進む。

上記二つの方法で待ち時間の平均と分散を比較してみよう。ただし、それぞれの客が切符を買うのに要する時間は平均 m, 分散 v の同じ確率分布に従っているとする。

---

*18 上の式の左辺は p の関数として $f(p) = \dfrac{2p}{1-2p} - \dfrac{2p}{1-p} + \dfrac{3}{2p}$ と整理でき、$p = \dfrac{1}{3}$ のとき最小になることが証明できる。

まず、確率変数の和と定数倍の公式を復習しておきましょう。

まず、c を定数とするとき、次は定義から明らかであろう。

$$(E1)\qquad E(cX) = cE(X), \qquad V(cX) = E[(cX - cm)^2] = c^2 E[(X-m)^2] = c^2 V(X).$$

ここで、第 2 式で $m = E(X)$ であり、第 1 式より $E(cX) = cm$ となることを用いた。

次に、X, Y を確率変数とし、X の取り得る値を $a_1, a_2, \cdots, a_M$, Y の取り得る値を $b_1, b_2, \cdots, b_N$ とし、$p_{kl} = P(X = a_k, Y = b_l)$ とする (これを X, Y の同時分布という)。このとき、

$$\sum_{k=1}^{M} p_{kl} = P(Y = b_l), \qquad \sum_{l=1}^{N} p_{kl} = P(X = a_k)$$

となるから、

$$(E2)\qquad E(X+Y) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}(a_k + b_l)p_{kl} = \sum_{k=1}^{M} a_k \sum_{l=1}^{N} p_{kl} + \sum_{l=1}^{N} b_l \sum_{k=1}^{M} p_{kl} = E(X) + E(Y)$$

を得る。次に、確率変数 X, Y が独立であるとは、

$$\text{すべての } k, l \text{ について}\quad P(X = a_k, Y = b_l) = P(X = a_k)P(Y = b_l)\quad \text{が成り立つ}$$

と定義する。このとき、次が成り立つ。

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} a_k b_l p_{kl} = \sum_{k=1}^{M} a_k P(X = a_k) \sum_{l=1}^{N} b_l P(Y = b_l) = E(X)E(Y).$$

これより、$m_1 = E(X)$, $m_2 = E(Y)$ とすると、

$$E[(X-m_1)(Y-m_2)] = E(XY) - m_2E(X) - m_1E(Y) + m_1m_2 = E(X)E(Y) - m_2m_1 - m_1m_2 + m_1m_2 = 0$$

となる。以上より、X, Y が独立のとき、$E(X+Y) = m_1 + m_2$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}(E3)\quad V(X+Y) &= E[(X+Y-m_1-m_2)^2] = E[(X-m_1)^2 + 2(X-m_1)(Y-m_2) + (Y-m_2)^2] \\ &= V(X) + V(Y)\end{aligned}$$

を得る。$(E2), (E3)$ については三つ以上の確率変数の場合も成り立つことに注意する。

例題 3.4 の解答: 簡単のため自分の前に並ぶ客の人数を、並列並びの場合 k 人とし、一列並びの場合 nk 人とする。

● **並列並びの待ち時間:** i 番目の客にかかる時間を X_i とすると、待ち時間は $S = X_1 + \cdots + X_k$. ここで、$X_1, \ldots, X_k$ は独立でそれぞれ平均 m, 分散 v となるので、

$$1)\qquad (E2) \text{ より } E(S) = km, \qquad (E3) \text{ より } V(S) = kv$$

となる。

● **一列並びの待ち時間:** 一列並びの場合は「すべての客が処理速度 n 倍である一つの窓口に並ぶ」ということだから、i 番目の客にかかる時間を Y_i とすると、これは $\frac{1}{n}X_i$ と同じ確率分布をもつと考えられる。したがって、$(E1)$ より $E(Y_i) = \frac{1}{n}E(X_i) = \frac{m}{n}$, $V(Y_i) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_i) = \frac{v}{n^2}$. 待ち時間は $T = Y_1 + \cdots + Y_{nk}$ で、$Y_1, \ldots, Y_{nk}$ は独立なので、

$$2)\qquad (E2) \text{ より } E(T) = kn \times \frac{m}{n} = km, \qquad (E3) \text{ より } V(T) = kn \times \frac{v}{n^2} = \frac{kv}{n}.$$

1), 2) を比べると、S, T の平均は同じだが T のほうが分散が小さい、したがって一列並びをすることで、客の待ち時間の「ばらつき」が小さくできること、すなわち待ち時間が平均を大きく上回る確率を小さくできることがわかる。 □

例題 3.5 (ペテルスブルグのパラドックス) 公正なコインを表が出るまで投げ続け、k 回目に表が初めて出たとき 2^k 円受け取れる宝くじがある。この宝くじはいくらの価値があるか。

解答 1: 受け取る額を X で表すと、$P(X = 2^k) = \dfrac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ となる。したがって、

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

これはいくら出しても購入する価値があると考えられる。 □

反論: 年末ジャンボ宝くじでは 1 等が当たる確率は約 1 千万分の一であるが、この宝くじで 2 億円以上獲得するためには、$2^{28} = 268,435,456$ より 28 回目以降に初めて表が出る必要がある。その確率は宝くじで 1 等が当たる確率の 13 分の 1 以下である。したがって、それほどの価値があるとは思えない。

解答 2: 胴元の財源から考えて 10 億円より多くは払えないだろうし、それだけあれば賞金として十分であろう。よって、30 回目以降に初めて表が続た場合の賞金は 2^{30} 円と考えて

$$\sum_{k=1}^{29} 2^k \frac{1}{2^k} + \sum_{k=30}^{\infty} 2^{30} \frac{1}{2^k} = 29 + 2^{30} \times \frac{1/2^{30}}{1 - 1/2} = 29 + 2 = 31$$

で 31 円となる[*19]。 □

発展的な話題: この宝くじを何枚も購入し、それを $X_1, X_2, \cdots$ と表す。すなわち、各 X_i は上記の宝くじと同じ賞金額の分布をもち、独立であるとする。このとき、次が成り立つことが証明できる ($cf.$ [1])。

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n \log_2 n} - 1\right| < \varepsilon\right) = 1$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は任意である。これより、n が十分大きければ、n 本のセットで $n \log_2 n$ 円の価値があるとなる。($\log_2 10 = 3.322$ より、例えば一億本売るのであれば、一本あたり約 27 円となる。) □

参考文献

[1] ウィリアム フェラー (河田龍夫 監訳): 確率論とその応用 I 上下, 紀伊國屋書店, 1960, 1961.
[2] 服部 哲弥: 統計と確率の基礎, 学術図書出版社, 2006.
[3] ダレル ハフ (高木秀玄 訳): 統計でウソをつく法, 講談社ブルーバックス, 1968.
[4] 伊庭 幸人: ベイズ統計と統計物理, 岩波講座 物理の世界, 2003.
[5] 市川 伸一: 確率の理解を探る 3 囚人問題とその周辺, 認知科学モノグラフ, 共立出版, 1998.
[6] 小島寛之: 確率的発想法 数学を日常に活かす, NHK ブックス, 2004.
[7] 小島寛之: 使える! 確率的思考, ちくま新書, 2005.
[8] 国沢 清典 編: 確率統計演習 2 統計, 培風館, 1966.
[9] デイヴィッド サルツブルグ (竹内惠行, 熊谷悦生 訳): 統計学を拓いた異才たち, 日経ビジネス人文庫, 2010.
[10] 田栗 正章, 藤越 康祝, 柳井 晴夫, C.R. ラオ: やさしい統計入門, 講談社ブルーバックス, 2007.
[11] 谷岡 一郎: 確率・統計であばくギャンブルのからくり, 講談社ブルーバックス, 2001.
[12] 渡部 洋: ベイズ統計学入門, 福村出版, 1999.

[*19] これは、どんなに小さな確率でも、その損失が計り知れないくらいの巨額となるならば、その確率を小さいからと無視してはならないことを示唆している。

問の解答

1.1 (1) $1 \cdot \dfrac{11}{12} \cdot \dfrac{10}{12} \cdot \dfrac{9}{12} \cdot \dfrac{8}{12} = \dfrac{55}{144} (\fallingdotseq 0.3819)$.

(2) 2 月生まれの人を含まないとき $11p \cdot 10p \cdot 9p \cdot 8p \cdot 7p$, 含むときその順序を考慮して、$5(1-11p) \cdot 11p \cdot 10p \cdot 9p \cdot 8p$. これを加えて、$f(p) = 7920p^4(5-48p)$. $f(p)$ の最大値については、$f(p)$ を微分して $f'(p) = 0$ を解き増減表を書けば $p = \dfrac{1}{12}$ のとき最大となることがわかる。

1.2 (1) $\dfrac{6}{6} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{9} (= 0.55555\cdots)$.

(2) 1, 6 の目を含まないとき、1 回だけ含むとき、2 回階含むときと分けて考え、1 か 6 の目の出る順番を考慮すると $\dfrac{4\cdot5}{28} \cdot \dfrac{3\cdot5}{28} \cdot \dfrac{2\cdot5}{28} + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{4\cdot5}{28} \cdot \dfrac{3\cdot5}{28} + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{4\cdot5}{28} = \dfrac{5\cdot303}{2^3\cdot7^3} = \dfrac{1515}{2744}$ $(= 0.5521137\cdots)$. ((1) より小さくなる。)

1.3 9 試合やれば必ず勝負がつくことに注意し、例題 1.2 と同様の表を作れば、(1) $\dfrac{7}{8}$ (2) $\dfrac{11}{16}$ となる。

(1)

現在までの勝敗		7	8	9	勝者
(WWWWLL)	→	W	W	W	A 氏
	→	W	W	L	A 氏
	→	W	L	W	A 氏
	→	W	L	L	A 氏

現在までの勝敗		7	8	9	勝者
(WWWWLL)	→	L	W	W	A 氏
	→	L	W	L	A 氏
	→	L	L	W	A 氏
	→	L	L	L	B 氏

(2)

現在まで		6	7	8	9	勝者
(WWWLL)	→	W	W	W	W	A 氏
	→	W	W	W	L	A 氏
	→	W	W	L	W	A 氏
	→	W	W	L	L	A 氏
	→	W	L	W	W	A 氏
	→	W	L	W	L	A 氏
	→	W	L	L	W	A 氏
	→	W	L	L	L	B 氏

現在まで		6	7	8	9	勝者
(WWWLL)	→	L	W	W	W	A 氏
	→	L	W	W	L	A 氏
	→	L	W	L	W	A 氏
	→	L	W	L	L	B 氏
	→	L	L	W	W	A 氏
	→	L	L	W	L	B 氏
	→	L	L	L	W	B 氏
	→	L	L	L	L	B 氏

1.4 例題 1.1 と同様に余事象を考えればよい。

(1) 4 回とも 6 の目が出ない確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4$. よって、勝つ確率は $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \fallingdotseq 0.5177$ となり、勝てることが多いと予想される。

(2) 二つとも 6 の目が出ないことが 24 回続く確率は $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$. よって、勝つ確率は $1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} \fallingdotseq 0.4914$ となり、負けることが多いと予想される。また、$\left(\dfrac{35}{36}\right)^{25} \fallingdotseq 0.4945$ なので、$1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} < 0.5 < 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{25}$ となり、25 回以上投げることにすれば勝てる確率が 0.5 より大きくなる。

2.1 A, B でそれぞれ A の工場, B の工場の製品である事象とし、F で不良品である事象とする。
仮定より $P_A(F) = 0.03$, $P_B(F) = 0.04$, $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{5}{9}$ であり、求める確率は $P_F(A)$ であるから、

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)P_A(F)}{P(A)P_A(F) + P(B)P_B(F)} = \frac{4\cdot3}{4\cdot3 + 5\cdot4} = \frac{3}{8}$$

2.2 A_1, A_2, A_3 でそれぞれ機械 M_1, M_2, M_3 の製品である事象とし、F で不良品である事象とする。
仮定より $P(A_1) = 0.6$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.1$, $P_{A_1}(F) = 0.02$, $P_{A_2}(F) = 0.03$, $P_{A_3}(F) = 0.06$

であり、求める確率は $P_F(A_3)$ であるから、

$$P_F(A_3) = \frac{P(A_3)P_{A_3}(F)}{P(A_1)P_{A_1}(F) + P(A_2)P_{A_2}(F) + P(A_3)P_{A_3}(F)} = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6} = \frac{2}{9}$$

2.3 A, B, C, D, E でそれぞれ A, B, C, D, E の扉に賞品があるという事象とするとき、$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = \frac{1}{5}$.

(1) 司会者が B の扉を開けるという事象を S_1 とすると、例題 2.4 と同様に、$P_A(S_1) = \frac{1}{4}$, $P_B(S_1) = 0$, $P_C(S_1) = P_D(S_1) = P_E(S_1) = \frac{1}{3}$. よって、

$$P_{S_1}(C) = \frac{P(C)P_C(S_1)}{P(A)P_A(S_1) + P(B)P_B(S_1) + P(C)P_C(S_1) + P(D)P_D(S_1) + P(E)P_E(S_1)} = \frac{4}{15}$$

(2) 司会者が B, E の扉を開けるという事象を S_2 とすると、(1) と同様に、$P_A(S_2) = \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{6}$, $P_B(S_2) = P_E(S_2) = 0$, $P_C(S_2) = P_D(S_2) = \dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{3}$. よって、$P_{S_2}(C) = \dfrac{2}{5}$.

2.4 例題 2.5 と同じ記号を用いると、$P_A(F) = \frac{1}{2}$, $P_B(F) = 0$, $P_C(F) = 1$. よって、事前確率が A, B, C それぞれが 1/4, 1/2, 1/4 であったとき、$P(A) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ より、$P_F(A) = \frac{1}{3}$.
また、1/2, 1/4, 1/4 のとき、$P_F(A) = \dfrac{1}{2}$ となる。

2.5 問 2.3 の解答と同じ記号を用いると、$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$, $P(D) = P(E) = \frac{1}{4}$. これより、問 2.3 と全く同様に (1) $P_{S_1}(A) = \dfrac{3}{19}$, (2) $P_{S_2}(A) = \dfrac{1}{6}$ となる。

3.1 $\displaystyle V(X) = \sum_{k=1}^{N} ({a_k}^2 - 2ma_k + m^2)p_k = \sum_{k=1}^{N} {a_k}^2 p_k - 2m\sum_{k=1}^{N} a_k p_k + m^2 \sum_{k=1}^{N} p_k$
$= E(X^2) - 2mE(X) + m^2 = E(X^2) - m^2$.

3.2 (1) X の取り得る値は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ で、X が m 以下となるためには、2 回の出た目がともに m 以下ならよい。よって、$P(X \leqq m) = \left(\dfrac{m}{6}\right)^2$ より、
$P(X = m) = P(X \leqq m) - P(X \leqq m-1) = \dfrac{2m-1}{36}$
となり、右の表を得る。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	1

(2) $E(X) = 1 \cdot \dfrac{1}{36} + 2 \cdot \dfrac{3}{36} + 3 \cdot \dfrac{5}{36} + 4 \cdot \dfrac{7}{36} + 5 \cdot \dfrac{9}{36} + 6 \cdot \dfrac{11}{36} = \dfrac{161}{36}$.
$E(X^2) = 1^2 \cdot \dfrac{1}{36} + 2^2 \cdot \dfrac{3}{36} + 3^2 \cdot \dfrac{5}{36} + 4^2 \cdot \dfrac{7}{36} + 5^2 \cdot \dfrac{9}{36} + 6^2 \cdot \dfrac{11}{36} = \dfrac{791}{36}$.
したがって、問 3.1 より、$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{2555}{36^2}$. $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{2555}}{36}$.