確率解析入門

杉浦　誠

平成 22 年 9 月 10 日

目 次

1 Brown 運動

この章では、Brown 運動を定式化し、Markov 性やその他の簡単な性質を見る。[1] [2]

1.1 確率過程

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、確率変数等はこの確率空間に定義されているものとする。以下、t は連続的に変化するとして、$t \in [0, \infty)$ あるいは $t \in [0, T]$, $T > 0$ とする。

定義 1.1 *(1)* $t \geq 0$ によりパラメーター付けられた $\mathbf{R}^d$ 値確率変数の族 $X = (X_t)_{t\geq 0} = (X_t(\omega))_{t\geq 0}$ を d 次元**確率過程** *(stochastic process)* という。単に確率過程といえば実数値 $(d = 1)$ である。
(2) d 次元確率過程が**連続**とは、$\forall\omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が連続であるときにいう。[3] [4]

注意 1.1 $W^d = C([0, \infty), \mathbf{R}^d)$ とおく *(path 空間という)*。X が d 次元連続確率過程であるとは、$X(\omega) \in W^d$, $\forall\omega \in \Omega$ というだけではなく、X は W^d-値確率変数であることを意味している*:* 即ち、$\forall A \in \mathcal{B}(W^d)$ に対して $\{\, \omega \in \Omega \,;\, X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ を満たす。ここで、W^d は広義一様収束から定まる位相[5]を考え、$\mathcal{B}(W^d)$ はこの位相での *Borel* 集合族を表す。これを示すために次の σ-加法族を導入する*:*

$$\mathcal{B}_K(W^d) := \sigma \left\{ C(t_1, \dots, t_n; A) \,;\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n < \infty, A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{dn}) \right\}$$

ここで $C(t_1, \dots, t_n; A) := \{w = (w_t)_{t\geq 0} \in W^d \,;\, (w_{t_1}, \dots, w_{t_n}) \in A\,\}$ は**柱状集合** *(cylinder set)* といい、上の σ-加法族 *(*すべての柱状集合を含む最小の σ-加法族*)* は *Kolmogorov* の σ-加法族と呼ばれる。実はこのとき、$\mathcal{B}(W^d) = \mathcal{B}_K(W^d)$ が成立し、このことから連続確率過程 X が W^d-値確率変数であることがわかる。

問 1.1 *(1)* $\mathcal{B}(W^d) = \mathcal{B}_K(W^d)$ を示し、*(2)* 連続確率過程 X が W^d-値確率変数であることを示せ。

$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の増大列 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ が、各 $\mathcal{F}_t$ は σ-加法族で $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $0 \leq s \leq t$ を満たすとき、**filtration** という。

定義 1.2 *(1)* d 次元確率過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-**適合** *(adapted)* とは、$\forall t \geq 0$ に対して $X_t : \Omega \to \mathbf{R}^d$ が $\mathcal{F}_t$-可測のときにいう。
(2) d 次元確率過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-**発展的可測** *(progressively measurable)* とは、$\forall t \geq 0$ に対して写像 $[0, t] \times \Omega \ni (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \in \mathbf{R}^d$ が $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$-可測のときにいう。ここで、$\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ は直積 σ-加法族を表す。

注意 1.2 X が $(\mathcal{F}_t)$-適合とは、t 時までの情報量としての $\mathcal{F}_t$ から X_t が判別可能であることを意味する。一方、発展的可測は $E[\int_0^t f(X_s)\, ds] = \int_{\Omega\times[0,t]} f(X_s(\omega))\, P(d\omega)ds$ を考えるのに必要となる。*(*実際は単に可測であれば十分である。*)* 実は、次の補題 *1.1* により X が $(\mathcal{F}_t)$-適合かつ右連続であれば、$(\mathcal{F}_t)$-発展的可測である。

---

[1] このノートは次の URL からダウンロードできます。 http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/

[2] 参考文献： [F] 舟木直久： 確率微分方程式 岩波書店
[N] 長井英生: 確率微分方程式 共立出版
[IW] N.Ikeda and S.Watanabe: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd ed., North Holland, 1989.
[KS] I.Karatzas and S.E.Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed., Springer, 1991.
[O] B.Øksendal: Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. 6th ed., Springer, 2003. (第 5 版の邦訳あり:谷口説男 訳)
[RY] D.Revuz and M.Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion 3rd ed., Springer, 1998.
[SV] D.W.Stroock and S.R.S.Varadhan: Multidimensional Diffusion Processes, Springer, 1979.
ここでは主に [F] に従って述べる。尚、この授業では確率論の基礎的事項は [F1] 舟木直久：確率論 朝倉書店 2004 を引用し証明なしで用います。

[3] この授業では連続確率過程のみを扱う。一般に右連続左極限を持つ関数の空間を path 空間とする場合もある。(Poisson 過程などがその例となる。)

[4] 本来は**連続修正** (continuous modification) について議論すべきであるが、ここでは略す。ここで、確率過程 X が連続修正をもつとは、連続な確率過程 Y が存在して $P(X_t = Y_t) = 1$, $\forall t \geq 0$ なるときにいう。

[5] この位相で W^d は可分完備距離空間 (ポーランド空間) となる。

補題 1.1 $X = (X_t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合とする。X が右連続: $\lim_{h\downarrow 0} X_{t+h}(\omega) = X_t(\omega)$, $\forall t \in [0,\infty), \forall \omega \in \Omega$ であれば、$(\mathcal{F}_t)$-発展的可測である。

証明: X_t は右連続とする。

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{(k+1)t/2^n}(\omega) \quad \text{for} \quad kt/2^n < s \le (k+1)t/2^n, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$$

とする。$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\{(s,\omega); X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Big(\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n} \Big] \times \big\{ \omega\,;\, X_{(k+1)t/2^n}(\omega) \in A \,\big\} \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$$

だから $X_s^{(n)}$ は $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-可測。右連続性より $\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. よって X_s は $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-可測となる。 $\square$

定義 1.3 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ を *filtration* とする。
(1) $\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$ とおく。$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, $\forall t$, のとき $(\mathcal{F}_t)$ は右連続、
(2) $\mathcal{F}_{t-} := \sigma(\mathcal{F}_s; s < t)$ とおく。$\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$, $\forall t$, のとき $(\mathcal{F}_t)$ は左連続という。

例 1.1 連続な確率過程 $X = (X_t)_{t\ge 0}$ に対し、$\mathcal{F}_t^{0,X} = \sigma\{\, X_s\,;\, 0 \le s \le t \,\}$ とおくと $(\mathcal{F}_t^{0,X})_{t\ge 0}$ は *filtration* で、X は $(\mathcal{F}_t^{0,X})$-適合となる。この $(\mathcal{F}_t^{0,X})$ を X の自然な *filtration* という。一般に $(\mathcal{F}_t^{0,X})$ は左連続であるが、右連続ではない。

問 1.2 X を連続な d 次元確率過程とする。開集合 $O \subset \mathbf{R}^d$ に対し $\sigma_O(\omega) := \inf\{\, t \ge 0\,;\, X_t(\omega) \in O \,\}$ とする *(*$\inf \emptyset = \infty$ と定める*)* と、$\{\sigma_O \le t\} \in \mathcal{F}_{t+}^{0,X}$ であるが一般には $\{\sigma_O \le t\} \notin \mathcal{F}_t^{0,X}$ であることを確かめよ。

確率過程の動きは、測度 P により支配される。その意味で測度 0 の集合族 $\mathcal{N} := \{\, N \in \mathcal{F}\,;\, P(N) = 0 \,\}$ を $\mathcal{F}_t^{0,X}$ に付け加えて、$\mathcal{F}_t^X := \mathcal{F}_t^{0,X} \vee \mathcal{N}$ を考えたほうが自然である。というのは、例えば $X_t = Y_t$ a.s. $(\forall t \ge 0)$ で X が $(\mathcal{F}_t^X)$-適合ならば Y も $(\mathcal{F}_t^X)$-適合となる。このようにして定義した $\mathcal{F}_t$ は (例えば Brown 運動のときのように) 自動的に t について連続になることがあり、便利である (*cf.* 定理 1.11)。

1.2 Brown 運動の定義

定義 1.4 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された *(*実数値*)* 確率過程 $B = (B_t)_{t\ge 0} = (B_t(\omega))_{t\ge 0}$ が **Brown 運動** *(Brownian motion)* であるとは、次の条件を満たすときにいう。

(1) $B_0 = 0$ *a.s.*

(2) $\forall \omega \in \Omega$ に対して、$t \mapsto B_t(\omega)$ は連続である。

(3) $0 \le s \le t$ に対し $B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s^{0,B} := \sigma(B_u; u \le s)$ は独立。

(4) $0 \le s \le t$ に対し、$B_t - B_s$ は平均値 0, 分散 $t - s$ の *Gauss* 分布に従う。

注意 1.3 条件 *(2)* あるいは定義 *1.1* では *a.s.* ω に対する連続性のみを仮定することが多い。しかし、それは本質的には同じことである。$B_t(\omega)$ が連続でないような ω については、例えば $B_t(\omega) \equiv 0$ *(*$t \ge 0$*)* と定義し直せばよいからである。

条件 (3), (4) から $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{1\le i\le n}$ は独立でそれぞれ $N(0, t_i - t_{i-1})$ に従う。これは $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して

$$P(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in A_i, 1 \le i \le n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \cdots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_i)$$

であることと同値である。ここで、

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, \qquad t>0, x \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

とした。さらに、$y_0 = 0$, $x_i = y_i - y_{i-1}$, $1 \le i \le n$ と変数変換すると、$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して

$$P(B_{t_i} \in A_i, 1 \le i \le n) = \int_{A_1} dy_1 \int_{A_2} dy_2 \cdots \int_{A_n} dy_n \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, y_i - y_{i-1}) \tag{1.2}$$

が得られる。これは、Brown 運動の n 時点での結合分布を与えている。次の定理は最も基本的である。

定理 1.2 適当な確率空間上に *Brown* 運動は存在する。

定理 1.2 の証明のために、Kolmogorov による二つの基本定理を準備する[6]。

定理 1.3 *(***Kolmogorov の拡張定理***)* 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$ 上の確率測度 μ_n が与えられ整合的 *(consistent)* であるとする。即ち、

$$\mu_{n+1}(A \times \mathbf{R}) = \mu_n(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), n \in \mathbb{N}$$

が成立すると仮定する。このとき、$(\mathbf{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbb{N}}))$ 上の確率測度 μ で $\mu(A \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}}) = \mu_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ となるものが一意的に存在する。ただし、$A \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}} := \{ (x^1, x^2, \ldots) \,;\, (x^1, \ldots, x^n) \in A \} \subset \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ を表し、$\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ には直積位相を入れ、$\mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbb{N}})$ はその *Borel* 集合族を表す。

証明: 第 1 段: $\mathcal{C} := \{ A \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}} \,;\, A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), n \in \mathbb{N} \}$ の要素を $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ の柱状集合という。μ を柱状集合上では $\mu(A \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}}) = \mu_n(A)$ と定義する。$\{\mu_n\}$ は整合的だから μ は n の取り方によらず一意的に定まる。$\mathcal{C}$ は有限加法族だから

$$C_n \in \mathcal{C} \text{ が } C_n \downarrow \emptyset \text{ (即ち、} C_n \supset C_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ かつ } \cap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset) \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0 \tag{1.3}$$

が示されれば、Hopf の拡張定理により、μ は $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbb{N}}) = \sigma(\mathcal{C})$ 上の測度として一意的に拡張され結論が言える。このために (1.3) を否定し $\exists \varepsilon > 0 : \mu_n(C_n) > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ として $\cap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ を示し矛盾を導く。

第 2 段: $C_n = A_n \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ としても一般性を失わない。実際、$C_1 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ から始め、同じ C_n を繰り返してとればよいからである。更に、各 A_n はコンパクト集合としてよい。実際、$A_n' \subset A_n$ を A_n' はコンパクトかつ $\mu_n(A_n \backslash A_n') \le \varepsilon/2^{n+1}$ を満たすようにとれる。そこで、$i < n$ のときは $\tilde{A}_i' = A_i' \times \mathbf{R}^{n-i}$ として $A_n'' = \tilde{A}_1' \cap \cdots \cap \tilde{A}_{n-1}' \cap A_n'$, $C_n'' = A_n'' \times \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ とおけば、A_n'' はコンパクト、$C_n'' \downarrow \emptyset$ かつ

$$\mu(C_n'') = \mu_n(A_n'') \ge \mu(A_n) - \sum_{i=1}^n \mu_i(A_i \backslash A_i') \ge \frac{\varepsilon}{2}$$

であるからである。

第 3 段: $\cap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ を示す。$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots) \in C_n$, $n \in \mathbb{N}$ を任意に取る。このとき、対角線論法により $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ と $x_\infty = (x_\infty^1, x_\infty^2, \ldots) \in \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ が存在して、各 i に対して $\lim_{n\to\infty} x_n^i = x_\infty^i$ とできる。各 A_n はコンパクト、即ち、閉集合だから $(x_\infty^1, \ldots, x_\infty^n) \in A_n$ となり $x_\infty \in \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ を得る。 □

$D_n := \{ k/2^n \,;\, k = 0, 1, \ldots, 2^n \}$, $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ とおく。

定理 1.4 *(***Kolmogorov の正規化定理***)* 確率過程 $X = (X_t)$ が、$C, \varepsilon, p > 0$ が存在して

$$E[|X_t - X_s|^p] \le C|t-s|^{1+\varepsilon}, \quad \forall s, t \in D \tag{1.4}$$

を満たせば、X_t は *a.s.* に D 上一様連続である。

[6] Brown 運動の構成方法としてここで紹介するものの他に (1) ランダムな係数をもつ Fourier 級数による方法、(2) Gauss 系の存在定理に帰着する方法、(3) ランダムウォークの時空に関するスケール変換の極限として導く (Donsker の不変原理と呼ばれる) がある。(*cf*. [KS] pp.56–71.)

証明: 第1段: $\lambda_n := 2^{-n\varepsilon/2p}$ ととり

$$\begin{array}{rcl} I_n & := & \{\,(s,t)\in D\times D\,;\,|t-s|\le 2^{-n}\,\} \\ A_n & := & \{\,\omega\in\Omega\,;\,|X_s-X_t|\ge\lambda_n, \exists(s,t)\in I_n\,\} \end{array}$$

とおく。もし $P(A_n)\le C_1 2^{-n\varepsilon/2}$ が示されれば、Borel-Cantelli の補題より $P(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}A_k)=0$ となり、結論を得る。

第2段: $a(n,t)=k/2^n, t\in[k/2^n,(k+1)/2^n)$ とおく。このとき

$$X_t = X_{a(n,t)}+\sum_{i=0}^{\infty}(X_{a(n+i+1,t)}-X_{a(n+i,t)}),\quad t\in D$$

である。実際 j を十分大とすると $a(j,t)=t$ であり、従って、上式右辺は有限和である。X_s も同様の和に表され、$(s,t)\in I_n$ ならば $|a(n,t)-a(n,s)|\le 2^{-n}$ である。

第3段: 次に $\omega\in A_n$ ならば、次の (a), (b) のいずれかが成立する:

(a) $\exists(s,t)\in I_n$ s.t. $|X_{a(n,t)}-X_{a(n,s)}|\ge\lambda_n/2$

(b) $\exists t,\exists i$ s.t. $|X_{a(n+i+1,t)}-X_{a(n+i,t)}|\ge 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2$.

もし (a), (b) ともに成立しなければ、$|X_t-X_s|<\frac{\lambda_n}{2}+\frac{3\lambda_n}{\pi^2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^2}=\lambda_n, \forall(s,t)\in I_n$ となるからである。(a) が成立するとき、$\exists(q,r)\in I_n\cap(D_n\times D_n)$ s.t. $|X_r-X_q|\ge\lambda_n/2$ である。このような (q,r) の対は高々2^n 個だから

$$\begin{array}{rcl} P(\text{(a) が成立}) & = & 2^n\sup_{s\in D_n}P(|X_{s+2^{-n}}-X_s|\ge\lambda_n/2)\le 2^n(2/\lambda_n)^p\sup_{s\in D_n}E[|X_{s+2^{-n}}-X_s|^p] \\ & \le & 2^n2^p\lambda_n^{-p}C2^{-n(1+\varepsilon)}=C_2 2^{-n\varepsilon/2}. \end{array}$$

一方、(b) が成立すれば、$\exists i,\exists(q,r)\in I_{n+i}\cap(D_{n+i+1}\times D_{n+i})$ s.t. $|X_r-X_q|\ge 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2$ となる。このような (q,r) の対は高々2^{n+i+1} 通りだから

$$\begin{array}{rcl} P(\text{(b) が成立}) & = & \sum_{i=0}^{\infty}2^{n+i+1}\sup_{s\in D_{n+i}}P(|X_{s+2^{-(n+i+1)}}-X_s|\ge 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2) \\ & \le & C\sum_{i=0}^{\infty}2^{n+i+1}2^{-(n+i+1)(1+\varepsilon)}(2(i+1)^2\pi^2/3\lambda_n)^p \\ & \le & C_3\sum_{i=0}^{\infty}2^{-(n+i+1)\varepsilon}(i+1)^{2p}\lambda_n^{-p}\le C_4 2^{-n\varepsilon/2}. \end{array}$$

両者を合わせて $P(A_n)\le C_1 2^{-n\varepsilon/2}$ がわかった。 □

系 1.5 確率過程 $X=(X_t)_{t\in[0,1]}$ が *(1.4)* を $\forall s,t\in[0,1]$ に対し満たすなら、X は連続修正をもつ。

証明: $t\notin D$ に対し $\tilde{X}_t:=\lim_{s\in D,s\downarrow t}X_s$ とおく。定理 1.4 によりこの極限は存在し、$\tilde{X}_t$ は $t\in[0,1]$ について連続となる。ところが、(1.4) から $s\in D, s\downarrow t$ のとき $X_s\to X_t$ in L^p だから $\forall t\in[0,1]$ に対し $\tilde{X}_t=X_t$ a.s. がわかる。従って、$\tilde{X}_t$ は X_t の連続修正である。 □

定理 1.2 の証明: 第1段: まず時間の区間を $[0,1]$ に制限して Brown 運動 $(B_t)_{t\in[0,1]}$ を構成しよう。$\Omega=\mathbf{R}^D$, $B_t(\omega)=\omega_t, t\in D,\omega\in\Omega$ ととる。$D=\{t_1,t_2,\dots\}$ と適当に番号付け、$\mathbf{R}^n$ 上の確率測度 μ_n を次のように定義する。$\{t_1,\dots,t_n\}$ を並べかえたものを $s_1<s_2<\dots<s_n$ として

$$\mu_n(dx_1\cdots dx_n):=\prod_{i=1}^{n}p(s_i-s_{i-1},x_i-x_{i-1})\,dx_i,\quad s_0=0,x_0=0$$

と定める。ただし、$p(t,x)$ は (1.1) の熱核である ($s_1=0$ のとき $p(0,x_1)\,dx_1=\delta_0(dx_1)$ と考える)。このとき、$\{\mu_n\}$ が整合的であることを示すには、p の半群性:

$$p(t+s,y-x)=\int_{\mathbf{R}} p(t,z-x)p(s,y-z)\,dz,\quad t,s>0$$

に注意すればよい。この等式は **Chapman-Kolmogorov の等式**とよばれる。従って、Kolmogorov の拡張定理から Ω 上の測度 μ が定まる。一方、

$$E^{\mu}[|B_t-B_s|^4]=\int_{\mathbf{R}^2}|x-y|^4 p(s,y)p(t-s,x-y)\,dydx=3|t-s|^2,\quad t>s,\ s,t\in D$$

であるから、Kolmogorov の正規化定理により $(B_t)_{t\in D}$ は μ-a.s. に一様連続である。$t\notin D$ のときは $B_t:=\lim_{s\in D,s\downarrow t}B_s$ と定めれば、$(B_t)_{t\in[0,1]}$ は (Ω,μ) 上で定義された Brown 運動になる。

第 2 段: 時間の区間を $[0,\infty)$ に拡張する。このため、第 1 段で構成した Brown 運動を独立で可算個 $\{(B_t^i)_{t\in[0,1]}\}_{i\in\mathbb{N}}$ を準備する (直積確率空間をとればよい)。これらを用いて $B_t:=\sum_{i=1}^{[t]}B_1^i+B_{t-[t]}^{[t]+1}$, $t\geq 0$ と定義すれば、$(B_t)_{t\geq 0}$ は Brown 運動になる。 □

$W(=W^1):=C([0,\infty),\mathbf{R})$, $W_0:=\{\,w\in W\,;\,w_0=0\,\}$ とおく。これらの空間に広義一様収束による位相を考える。$\mathcal{B}(W),\mathcal{B}(W_0)$ をそれぞれの Borel 集合族とする。

定義 1.5 定義 *1.4* で $\mu(A)=P(B_\bullet\in A)$, $A\in\mathcal{B}(W_0)$ とおくと、$B_t(w)=w_t, w=(w_t)_{t\geq 0}\in W_0$ が *Brown* 運動となるが、この $(W_0,\mathcal{B}(W_0))$ 上の測度 μ を **Wiener 測度**とよぶ。

定理 1.2 より Wiener 測度は存在し、しかも一意的であることがわかる。

定義 1.6 d 次元確率過程 $B_t=(B_t^i)_{1\leq i\leq d}=(B_t^1,\ldots,B_t^d), t\geq 0$ が **d 次元 Brown 運動**であるとは、各 B_t^i が *Brown* 運動で、かつ $\{B^i\}_{1\leq i\leq d}$ は独立であるときにいう。

d 次元 Brown 運動の構成には、d 個の独立な Brown 運動を準備して並べればよい。即ち、$i=1,\ldots,d$ に対し確率空間 $(\Omega^i,\mathcal{F}^i,P^i)$ 上で定義された Brown 運動 $B^i=(B_t^i)_{t\geq 0}$ をとり、$\Omega=\prod_{i=1}^d\Omega^i$, $\mathcal{F}=\prod_{i=1}^d\mathcal{F}^i$, $P=\prod_{i=1}^d P^i$ と定め、$\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_d)\in\Omega$ に対し $B_t(\omega)=(B_t^1(\omega_1),\ldots,B_t^d(\omega_d))$ ととれば、これは $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された d 次元 Brown 運動である。

1.3 簡単な性質

$B=(B_t)_{t\geq 0}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された 1 次元 Brown 運動として $\mathcal{F}_t^0=\sigma\{\,B_s\,;\,0\leq s\leq t\,\}$, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^0\vee\mathcal{N}$ とおく。ただし、$\mathcal{N}=\{\,N\in\mathcal{F}\,;\,P(N)=0\,\}$ である。次は Brown 運動の定義よりすぐにわかる。

命題 1.6 *(1)* $E[B_t^{2p}]=(2p-1)!!t^p, E[B_t^{2p-1}]=0,\ p\in\mathbb{N}$.
(2) $E[B_tB_s]=t\wedge s(:=\min\{t,s\}),\ t,s\geq 0$.
(3) $B=(B_t)_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-*martingale*、即ち、$E[B_t|\mathcal{F}_s]=B_s$ *a.s.* $0<s<t$.

証明: (1) B_t は正規分布 $N(0,t)$ に従うから明らか。(2) $0\leq s<t$ とする。定義 1.4 (3) より B_t-B_s と $\mathcal{F}_s$ は独立だから

$$E[B_tB_s]=E[(B_t-B_s)B_s]+E[B_s^2]=E[B_t-B_s]E[B_s]+s=s.$$

(3) (2) と同様に $A\in\mathcal{F}_s$ のとき、$E[(B_t-B_s)1_A]=E[B_t-B_s]P(A)=0$. □

命題 1.7 次のように、ブラウン運動 B から定義される新たな確率過程 B^a,B^b,B^c はいずれも *Brown* 運動である。ただし、$s>0,\gamma>0$ は固定する。

(1) $B_t^a:=B_{t+s}-B_s,\ t\geq 0$. *(2)* $B_t^b:=-B_t,\ t\geq 0$. *(3)* $B_t^c:=\gamma B_{t/\gamma^2},\ t\geq 0$.

証明: 定理 1.2 を考慮すると (1.2) を示せばよい。ここでは、(1) のみ示す。(その他の場合も同様である。) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $g \in C_b(\mathbf{R}^n)$ に対し、

$$\begin{aligned}
&E[g(B^a_{t_1}, \ldots, B^a_{t_n})] = E[g(B_{t_1+s} - B_s, \ldots, B_{t_n+s} - B_s)] \\
&= \int_{\mathbf{R}^{n+1}} g(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) p(s, x_0) \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1})\, dx_0 dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbf{R}} p(s, x_0)\, dx_0 \int_{\mathbf{R}^n} g(x'_1, \ldots, x'_n) \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x'_i - x'_{i-1})\, dx'_1 \cdots dx'_n \\
&= E[g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})]. \qquad \square
\end{aligned}$$

問 1.3 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ を d 次元 *Brown* 運動、A を $d \times d$ 直交行列とすれば、AB_t も d 次元 *Brown* 運動であることを示せ。

ヒント*:* $B = (B_t)_{t \geq 0}$ が d 次元 *Brown* 運動のとき、*(1.1)* の $p(t, x)$ の替わりに

$$p(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/2t}, \qquad t > 0, x \in \mathbf{R}^d$$

をして *(1.2)* が $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ に対して成立することを用いて、命題 *1.7* と同様に示せ。

命題 1.8 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ の $[T_1, T_2]$, $0 \leq T_1 < T_2$, における全変動は、*a.s.* ω に対し無限大である。

証明: 命題 1.7 から $T_1 = 0, T_2 = 1$ として証明すればよい。$[0, 1]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ に対して $V^{(2)}_\Delta(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \{B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)\}^2$ とおく。このとき、

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} E[(V^{(2)}_\Delta - 1)^2] = 0$$

を示す。ただし、$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq N}\{t_i - t_{i-1}\}$ とする。実際 $Z_i := \{B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)\}^2 - (t_i - t_{i-1})$ とすると $\{Z_i\}_{1 \leq i \leq N}$ は独立かつ $E[Z_i] = 0$ より

$$E[(V^{(2)}_\Delta - 1)^2] = E[\Big(\sum_{j=1}^{N} Z_i\Big)^2] = \sum_{j=1}^{N} E[{Z_i}^2] = \sum_{j=1}^{N} 2(t_i - t_{i-1})^2 \leq 2\|\Delta\| \to 0.$$

よって、$V^{(2)}_\Delta \to 1$ in L^2 であるから、部分列 $\{\Delta_k\}$ をとり $V^{(2)}_{\Delta_k} \to 1$ a.s. とできる。

一方、$\delta_\Delta(\omega) = \max_i |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|$ とおくと、$B_t(\omega)$ は $[0, 1]$ 上で一様連続だから、$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \delta_\Delta(\omega) = 0$. よって、全変動 $V(\omega) = \sup_\Delta V_\Delta(\omega)$, $V_\Delta(\omega) = \sum_{i=1}^{N} |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|$ について、上記の $\{\Delta_k\}$ に沿って考えると、

$$V(\omega) \geq V_{\Delta_k}(\omega) \geq \frac{V^{(2)}_{\Delta_k}(\omega)}{\delta_{\Delta_k}(\omega)} \to \infty \text{ a.s.}$$

を得る。 $\square$

Brown 運動の path の性質として以下のことが知られている。証明はそれぞれ [KS] §2.9 D 定理 9.18, §2.9 E 定理 9.23, §2.9 F 定理 9.25 を参照せよ。

命題 1.9 *(1)* *a.s.* ω に対し、$B_t(\omega)$ は t について、いたるところ微分不可能である。

(2) 重複対数の法則*:*

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log 1/t}} = 1 \ a.s. \qquad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log 1/t}} = -1 \ a.s.$$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1 \ a.s. \qquad \liminf_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1 \ a.s.$$

(3) *Hölder* 連続性*:*

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\delta \log 1/\delta}} \max_{\substack{t-s \leq \delta, \\ 0 \leq s < t \leq 1}} |B_t - B_s| = 1 \ a.s.$$

1.4 Markov 性

$B=(B_t)_{t\geq 0}$ を d 次元 Brown 運動として、$x\in\mathbf{R}^d$ から出発する Brown 運動を $(x+B_t)_{t\geq 0}$ で定義する。その $(W^d,\mathcal{B}(W^d))$ 上に定める分布を P_x とする。P_x に関する平均値を $E_x[\,\cdot\,]$ と書く。確率空間 $(W^d,\mathcal{B}(W^d),P_x)$ 上の確率過程 $B_t(w), w\in W^d$ は**標準座標関数**、つまり $B_t(w)=w_t$ で与えられているとする。

問 1.4 *(1)* $Y=Y(w)$ が W^d 上の有界連続関数のとき、$\mathbf{R}^d\ni x\mapsto E_x[Y]\in\mathbf{R}$ は連続であることを示せ。(難しければ、$Y(w)=\prod_{k=1}^n f_k(w_{t_k})$, $0\leq t_1<\cdots<t_n$ で $f_k\in C_b(\mathbf{R}^d)$ のときに示せ。)
(2) $Y=Y(w)$: W^d 上の有界 $\mathcal{B}(W^d)$-可測関数に対し、$\mathbf{R}^d\ni x\mapsto E_x[Y]\in\mathbf{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$-可測であることを示せ。

$\mathcal{B}(W^d)$ の部分加法族

$$\mathcal{F}_t^0:=\sigma(B_s;s\leq t),\quad \mathcal{F}_t:=\mathcal{F}_t^0\vee\mathcal{N},\quad \mathcal{F}_t^*:=\cap_{s>t}\mathcal{F}_s$$

を導入する。ただし、ここでは $\mathcal{N}:=\{\,N\in\mathcal{B}(W^d)\,;\,P_x(N)=0,\forall x\in\mathbf{R}^d\}$ とする。更に W^d 上のシフト作用素 $\theta_s:W^d\to W^d$, $s\geq 0$ を $(\theta_s w)_t:=w_{t+s}$ によって定義する。$B_t\circ\theta_s=B_{t+s}$ に注意する。

定理 1.10 *($\mathcal{F}_t$ に関する Markov 性)* $\forall x\in\mathbf{R}^d$, $\forall s\geq 0$ と $\forall Y=Y(w)$: W^d 上の有界 $\mathcal{B}(W^d)$-可測関数に対し

$$E_x[Y\circ\theta_s|\mathcal{F}_s]=E_{B_s(w)}[Y],\quad P_x\text{-}a.s.\ w\in W^d \tag{1.5}$$

が成立する。

(1.5) は、(左辺) 時刻 s までの運動がわかったとして s 時より先の運動についての平均値で、それが (右辺) 現在いる位置から新たに出発する Brown 運動の法則に関する平均値に等しいことを意味している。

証明: (1.5) のためには有界 $\mathcal{F}_s$-可測関数 Z を任意に選んだとして次を示せばよい:

$$E_x[Y\circ\theta_s\cdot Z]=E_x[E_{B_s(w)}[Y]\cdot Z] \tag{1.6}$$

ただし、問題 1.4 より右辺の積分が well-defined であることに注意する。

第 1 段: $f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ を有界 Borel 可測として $Y=f(B_t), t\geq 0$ のときに示す。このためには $f(x)=e^{i\xi\cdot x},\xi\in\mathbf{R}^d$ として示せば十分である。(このような f の 1 次結合をとり、極限操作をすればよい。) そこで $Y=e^{i\xi\cdot B_t}$ とすると

$$\begin{aligned}E_x[e^{i\xi\cdot B_t\circ\theta_s}\cdot Z] &= E_x[e^{i\xi\cdot B_{t+s}}\cdot Z]=E_x[e^{i\xi\cdot(B_{t+s}-B_s)}e^{i\xi\cdot B_s}\cdot Z]\\ &= E_x[e^{i\xi\cdot(B_{t+s}-B_s)}]E_x[e^{i\xi\cdot B_s}\cdot Z]=e^{-|\xi|^2t/2}E_x[e^{i\xi\cdot B_s}\cdot Z]\end{aligned}$$

一方、$E_y[e^{i\xi\cdot B_t}]=E_0[e^{i\xi\cdot(B_t+y)}]=e^{i\xi\cdot y}e^{-|\xi|^2t/2}$ より結論を得る。

第 2 段: $Y=\prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k})$, $0\leq t_1<\cdots<t_n$ で $f_k:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ が有界 Borel 可測のときに示す。これを n に関する帰納法で示す。$n=1$ は第 1 段で示した。$n-1$ まで成立するとすると

$$\begin{aligned}E_x[Y\circ\theta_s\cdot Z] &= E_x\Big[\prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k+s})\cdot Z\Big]=E_x\Big[E_{B_{t_1+s}}\Big[\prod_{k=2}^n f_k(B_{t_k-t_1})\Big]\cdot f_1(B_{t_1+s})Z\Big]\\ &= E_x\Big[E_{B_s}\Big[E_{B_{t_1}}\Big[\prod_{k=2}^n f_k(B_{t_k-t_1})\Big]f_1(B_{t_1})\Big]\cdot Z\Big]\\ &= E_x\Big[E_{B_s}\Big[f_1(B_{t_1})\prod_{k=2}^n f_k(B_{t_k})\Big]\cdot Z\Big]=E_x[E_{B_s}[Y]\cdot Z]\end{aligned}$$

ここで 1 行目 2 つ目の等号では帰納法の仮定を $f_1(B_{t_1+s})Z$ が $\mathcal{F}_{t_1+s}$-可測であることに注意して用い、2 行目の等号では第 1 段の結果を用い、3 行目最初の等号は帰納法の仮定を $f_1(B_{t_1})$ が $\mathcal{F}_{t_1}$-可測であることに注意して (逆方向に) 用いている。

<u>第 3 段</u>: 一般の Y については、問題 1.1 (1) の $\mathcal{B}(W^d) = \mathcal{B}_K(W^d)$ に注意すれば、第 2 段で考えたような Y の 1 次結合および極限操作により (1.6) は証明される。 □

定理 1.11 *($\mathcal{F}_t^*$ に関する Markov 性)* $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ であり、したがって、*(1.6)* は任意の $\mathcal{B}(W^d)$-可測な有界関数 Y と任意の $\mathcal{F}_s^*$-可測な有界関数 Z に対して成立する。

証明: <u>第 1 段</u>: (1.6) を $\mathcal{F}_s^*$-可測な有界関数 Z と $Y = f(B_t)$, $f \in C_b(\mathbf{R}^d)$, $t \geq 0$ のときに示す。Z は $\mathcal{F}_{s+\varepsilon}$-可測, $\forall \varepsilon > 0$ だから、定理 1.10 により

$$E_x[f(B_{t+s+\varepsilon})Z] = E_x[E_{B_{s+\varepsilon}}[f(B_t)]Z].$$

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば f の有界連続性と B_t の連続性から、Lebesgue の優収束定理より左辺は $E_x[f(B_{t+s})Z]$ に収束する。一方、

$$g_t(y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(z)p(t, z-y)\, dz$$

とおくと g_t は有界連続で $E_x[E_{B_{s+\varepsilon}}[f(B_t)]Z] = E_x[g_t(B_{s+\varepsilon})Z]$ より、同様に Lebesgue の優収束定理より右辺は $E_x[g_t(B_s)Z] = E_x[E_{B_s}[f(B_t)]Z]$ に収束するので結論を得る。

<u>第 2 段</u>: 第 1 段の主張は、極限操作をすることで任意の有界 Borel 関数 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ に対して証明できる。これより定理 1.10 の証明の第 2 段と同様に、$\mathcal{F}_s^*$-可測な有界関数 Z と $Y = \prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k})$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ で f_k が有界 Borel 可測に対しても (1.6) は示される。

<u>第 3 段</u>: Y を第 2 段のそれとし、$t_i \leq s < t_{i+1}$ とする。このとき、第 2 段の結果から任意の $\mathcal{F}_s^*$-可測な有界関数 Z に対し

$$E_x[YZ] = E_x[Y_1 \circ \theta_s Y_2 \cdot Z] = E_x[E_{B_s}[Y_1]Y_2 \cdot Z],$$

ただし、$Y_1 = \prod_{k=i+1}^n f_k(B_{t_k - s})$, $Y_2 = \prod_{k=1}^i f_k(B_{t_k})$ である。ここで、$E_{B_s}[Y_1]Y_2$ は $\mathcal{F}_s$-可測である。即ち、上の形の Y に対して $\mathcal{F}_s$-可測な $\widetilde{Y}$ が存在して

$$E_x[Y \cdot 1_A] = E_x[\widetilde{Y} \cdot 1_A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s^* \tag{1.7}$$

となる。極限操作により、これは $\forall Y$: $\mathcal{B}(W^d)$-可測な有界関数に対していえる (*cf*. 問 1.5)。特に、$Y = 1_G$, $G \in \mathcal{F}_s^*$ ととれば、$E_x[(1_G - \widetilde{1_G})1_A] = 0$, $\forall A \in \mathcal{F}_s^*$-可測である。ところが、$1_G - \widetilde{1_G}$ は $\mathcal{F}_s^*$ であるから、$1_G - \widetilde{1_G} = 0$, P_x-a.s. である。ここで、$\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_s$ であることに注意すると 1_G は $\mathcal{F}_s$-可測であることがわかる。従って、$G \in \mathcal{F}_s$、i.e., $\mathcal{F}_s^* \subset \mathcal{F}_s$ となり、"$\supset$" は自明だから証明は完了した。 □

問 1.5 $\forall Y$*:* $\mathcal{B}(W^d)$-可測な有界関数に対して、$\mathcal{F}_s$-可測な $\widetilde{Y}$ が *(*$x \in \mathbf{R}$ によらずに*)* 存在して *(1.7)* とできることを示せ。

証明の概略: $\mathcal{G} := \{G \in \mathcal{F}; \mathcal{F}_s$-可測な $\tilde{1_G}$ が存在して $E[1_G 1_A] = E[\tilde{1_G} 1_A]], \forall x \in \mathbf{R}^d, \forall A \in \mathcal{F}_s^*\}$ 第 2 段の形の関数の有限和からなる関数列 $\{Y_n\}$ を Y に $L^1(P_x)$-収束するように選べることに注意する。このとき、$\left|E[(\widetilde{Y_m} - \widetilde{Y_n}) \cdot 1_A]\right| \leq E[|Y_m - Y_n|]$ を示し、特に $A = \{\widetilde{Y_m} - \widetilde{Y_n} > 0\}$, $\{\widetilde{Y_m} - \widetilde{Y_n} < 0\}$ ととることで、$\{\widetilde{Y_n}\}$ が $L^1(P_x)$ での Chauchy 列となることが証明できる。その極限を $\widetilde{Y}$ とするとき、これは $\{\widetilde{Y_n}\}$ の適当な部分列に対する a.s. 収束での極限でもあるので、$\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_s$ を考慮して $\widetilde{Y}$ が $\mathcal{F}_s$-可測であることが従う。 □

系 1.12 *(Blumenthal の 0-1 法則)* $A \in \mathcal{F}_0 (= \mathcal{F}_0^*)$ ならば、$P_x(A) = 0$ または 1 である。

証明: $A \in \mathcal{F}_0$ ならば

$$P_x(A) = E_x[1_A] = E_x[1_A \circ \theta_0 1_A] = E_x[E_{B_0}[1_A]1_A] = E[P_x(A)1_A] = P(A)^2.$$

故に、$P_x(A) = 0$ または 1 である。 □

例 1.2 原点から出発する *Brown* 運動に対し $\sigma_{(0,\infty)} := \inf\{\, t>0\,;\, B_t \in (0,\infty)\,\}$ *(Brown* 運動が初めて正になる時刻*)* とすると、$P(\sigma_{(0,\infty)}=0)=1$ となる。

実際、$A := \{\sigma_{(0,\infty)}=0\} \in \mathcal{F}_0$ より系 *1.12* より $P(\sigma_{(0,\infty)}=0)=0$ *or* 1. ところが、$\forall t>0$ に対して $P(\sigma_{(0,\infty)} \ge t) \le P(B_t \le 0) = 1/2$ だから、$t \downarrow 0$ として $P(\sigma_{(0,\infty)}=0) \ge 1/2$ となるからである。*(*これは、*Brown* 運動は非常に揺れ動いているので即座に正の部分に行き、同時に対称性から負の部分に即時に達していることを意味している。*)*

1.5 Brown 運動の構成の別証明

この節ではランダムな係数をもつ Fourier 級数を用いた定理 1.2 の証明を与える。

このために独立でそれぞれ標準正規分布に従う確率変数列 $\{\xi_n^k\}$ と $L^2[0,1]$ の完全正規直交系である次の $\{\psi_n^k\}$ を準備する:

$$\begin{aligned}
\psi_0^1(t) &\equiv 1 \\
\psi_n^k(t) &= 2^{(n-1)/2}\left\{1_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})}(t) - 1_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})}(t)\right\}, \quad k \in I(n), \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

ただし、$I(0)=\{1\}$, $I(n)=\{1,3,\ldots,2^n-1\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とする。このとき、

$$B_t^{(N)}(\omega) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k \in I(n)} \xi_n^k(\omega) \int_0^t \psi_n^k(s)\, ds \tag{1.8}$$

とおく。(実際は $L^2[0,1]$ の完全正規直交系であればよい (伊藤-西尾の結果)。)

補題 1.13 $\{\psi_n^k; k \in I(n), n=0,1,\ldots\}$ は $L^2[0,1]$ の完全正規直交系である。

証明: $g \in L^2[0,1]$ として、$\forall k \in I(n), n=0,1,\ldots$ に対して $\int_0^1 g(t)\psi_n^k(t)\,dt = 0$ を満たすとき、$g=0$ a.e. を示せばよい。更にこのためには、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g(t)\,dt = 0, \qquad k=0,1,\ldots,2^n-1 \tag{1.9}$$

を示せばよい。これは $\{\, k/2^n\,;\, k=0,1,\ldots,2^n, n\in\mathbb{N}\,\}$ が $[0,1]$ で稠密であることによる。$n=0$ のときは $\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\psi_0^1(t)\,dt = 0$ となり成立する。$n-1$ のとき成立する。n のとき、k が偶数であれば $k'=k/2$ と書くとき

$$\begin{aligned}
1_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})}(t) &= \frac{1}{2}\big(1_{[\frac{k'}{2^{n-1}},\frac{k'}{2^{n-1}})}(t) + 2^{-(n-1)/2}\psi_n^{k+1}(t)\big) \qquad \text{であるから} \\
\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g(t)\,dt &= \frac{1}{2}\Big(\int_{k'/2^{n-1}}^{(k'+1)/2^{n-1}} g(t)\,dt - 2^{-(n-1)/2}\int_0^1 g(t)\psi_n^k(t)\,dt\Big) = 0.
\end{aligned}$$

一方、$\displaystyle\int_{(k+1)/2^n}^{(k+2)/2^n} g(t)\,dt = \int_{k'/2^{n-1}}^{(k'+1)/2^{n-1}} g(t)\,dt - \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g(t)\,dt = 0.$ $\square$

補題 1.14 *a.a.* ω に対して $\{B_t^{(N)}(\omega); 0 \le t \le 1\}$ は $N \to \infty$ のとき $[0,1]$ 上で一様収束する。

証明: $b_n(\omega) = \max_{k \in I(n)} |\xi_n^k(\omega)|$ とおく。$x>0$ に対して

$$\begin{aligned}
P(|\xi_n^k|>x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty \frac{u}{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \quad \text{より} \\
P(b_n>n) &= P\Big(\bigcup_{k \in I(n)}\{|\xi_n^k|>n\}\Big) \le 2^n P(|\xi_n^1|>x) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}, \quad n \ge 1.
\end{aligned}$$

従って、$\sum_n P(b_n > n) < \infty$ であるから Borel-Cantelli の補題より、$\tilde{\Omega} = \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty \{b_n \le n\}$ とおくと $P(\tilde{\Omega}) = 1$ で、$\omega \in \tilde{\Omega}$ ならば $N(\omega)$ が存在して $n \ge N(\omega)$ ならば $b_n(\omega) \le n$ であるから

$$\max_{0\le t\le 1} \sum_{n=N(\omega)+1}^{\infty} \sum_{k\in I(n)} |\xi_n^k(\omega) \int_0^t \psi_n^k(s)\,ds| \le \sum_{n=N(\omega)+1}^{\infty} n 2^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

よって、(1.8) で定義した $\{B_t^{(N)}(\omega); 0 \le t \le 1\}$ は $[0,1]$ 上で一様収束する。 $\square$

定理 1.2 の別証明: 第 1 段: 補題 1.14 より $B_t = \lim_{N\to\infty} B_t^{(N)}$ が存在するとしてよい。この $(B_t)_{t\in[0,1]}$ が Brown 運動であることを示す。$t \mapsto B_t(\omega)$ の連続性は補題 1.14 より明らかであるから ($cf.$ 注意 1.3)、このためには $\forall 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le 1$ に対して $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^m$ が独立でそれぞれ平均 0, 分散 $t_j - t_{j-1}$ の正規分布に従うことを示せばよい。これは次と同値である: $\forall \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ に対して

$$E\Big[\exp\Big\{i\sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big\}\Big] = \prod_{j=1}^m \exp\Big\{-\frac{1}{2}\lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big\}.$$

$\lambda_{m+1} = 0$, $S_n^k(t) = \int_0^t \psi_n^k(s)\,ds$ と書くとき、$\{\xi_n^k\}$ は独立で $N(0,1)$ に従うから

$$\begin{aligned}
&E\Big[\exp\Big\{i\sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j}^{(N)} - B_{t_{j-1}}^{(N)})\Big\}\Big] = E\Big[\exp\Big\{i\sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) B_{t_j}^{(N)}\Big\}\Big] \\
&= E\Big[\exp\Big\{-i\sum_{n=0}^N \sum_{k\in I(n)} \xi_n^k \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_n^k(t_j)\Big\}\Big] \\
&= \prod_{n=0}^N \prod_{k\in I(n)} E\Big[\exp\Big\{-i\xi_n^k \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_n^k(t_j)\Big\}\Big] \\
&= \prod_{n=0}^N \prod_{k\in I(n)} \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{\sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_n^k(t_j)\Big\}^2\Big] \\
&= \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{j'+1} - \lambda_{j'}) \sum_{n=0}^N \sum_{k\in I(n)} S_n^k(t_j) S_n^k(t_{j'})\Big].
\end{aligned}$$

補題 1.13 と Parseval の等式から $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k\in I(n)} S_n^k(t_j) S_n^k(t_{j'}) = \int_0^1 1_{[0,t_j)} 1_{[0,t_{j'})}\,dt = t_j \wedge t_{j'}$ であるので、$N \to \infty$ として (右辺は Lebesgue の有界収束定理を用いている)

$$\begin{aligned}
&E\Big[\exp\Big\{i\sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big\}\Big] = \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{j'+1} - \lambda_{j'}) t_j \wedge t_{j'}\Big] \\
&= \exp\Big\{-\sum_{j=1}^m \sum_{j'=j+1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{j'+1} - \lambda_{j'}) t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 t_j\Big\} \\
&= \exp\Big\{-\sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)(-\lambda_{j+1}) t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 t_j\Big\} \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_{j+1}^2 - \lambda_j^2) t_j - \frac{1}{2}\lambda_m^2 t_m\Big\} = \prod_{j=1}^m \exp\Big\{-\frac{1}{2}\lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big\}.
\end{aligned}$$

第 2 段: p.8 の第 2 段と全く同様だから略す。 $\square$

最後に、Donsker の不変原理に簡単に触れておく。

$\{\xi_n\}$ を独立で同分布を持つ確率変数列で、平均 0, 分散 σ^2 をもつとする (典型例は $\{\xi_n\}$ は独立で $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$ とするとき)。このとき、$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $k \ge 1$, とおき、

$$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}, \qquad t \ge 0$$

とおく。ただし、$[t]$ は t の整数部分を表す。これは整数時刻 n では $Y_n^{(N)}=S_n$ とし、$n<t<n+1$ となる t においては S_n と S_{n+1} を直線で結んで得られる、折れ線となっている。このとき、

$$X_t^{(N)}=\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}Y_{Nt},\qquad N\geq 1 \tag{1.10}$$

とおく。$X^{(N)}=(X_t^{(N)})$ は $W_0(=\{\,w\in C([0,\infty),\mathbf{R})\,;\,w_0=0\,\})$-値確率変数となっていることに注意する。

このとき、中心極限定と類似の証明で次が成り立つ ([KS] 定理 4.17)。

定理 1.15 $N\to\infty$ のとき、$(X_t^{(N)})$ の有限次元分布はブラウン運動 (B_t) のそれに法則収束する。即ち、$\forall 0=t_0<t_1<\ldots<t_m\leq 1$ に対して、$(X_{t_1}^{(N)},X_{t_2}^{(N)},\cdots,X_{t_m}^{(N)})\xrightarrow{d}(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_m})$ *(*$N\to\infty$*)* となる。ここで、$\xrightarrow{d}$ は法則収束を意味する。

これは、次のように精密化される。

定理 1.16 *(***Donsker の不変原理***)* P_N を $X^{(N)}$ の像測度とする*:* $P_N(A)=P(X_\bullet^{(N)}\in A)$*,* $A\in\mathcal{B}(W)$*.* このとき、$N\to\infty$ のとき P_N は *Wiener* 測度 μ *(cf. 定義 1.5)* に弱収束する。即ち、任意の W 上の有界連続関数 F に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X F\,dP_n=\int_X F\,d\mu$ となる。

これを証明するためには、確率測度の列 $\{P_N\}$ が点列 compact であることが示されれば、その任意の部分列は収束部分列を持ち、定理 1.15 によりその極限は Wiener 測度と一致するので、証明は完了する。確率測度の列の点列 compact 性は tight であることと同値であり、それは $\forall\varepsilon>0$ に対して W の compact 集合 K が存在して、$P_N(K)>1-\varepsilon$ となると定義される。よって、Ascoli-Arzelà の定理[7]により次を示せばよいことがわかる。

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_N P\left[\max_{\substack{|s-t|\leq\delta,\\ 0\leq s,t\leq T}}\left|X_s^{(N)}-X_t^{(N)}\right|>\varepsilon\right]=0,\qquad \forall T>0,\ \forall\varepsilon>0.$$

ここで、$X_0^{(N)}=0$ より、一様有界性については同程度連続性から従うことを注意する。

2 Martingales

2.1 条件付平均値と条件付確率

まず、条件付平均値と条件付確率の定義と簡単な性質を復習しておく。定義 2.1 と命題 2.1 について詳しくは [F1] を参照せよ。

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された可積分な確率変数 X と、$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ が与えられたとする。

$$Q(B):=E[X,B]\equiv\int_B X(\omega)P(d\omega),\qquad B\in\mathcal{G}$$

とおくと、Q は $(\Omega,\mathcal{G})$ 上の符号付測度となる。このとき Q は P に関して絶対連続だから、Radon-Nikodym の定理 (前期の定理 1.6, 系 1.7) より $\mathcal{G}$-可測な確率変数 Y が存在して

$$Q(B)=\int_B Y(\omega)P(d\omega),\qquad B\in\mathcal{G}$$

と書ける。

定義 2.1 *(1)* 上記の Y を $E[X|\mathcal{G}]$ と書き、$\mathcal{G}$ の下での X の**条件付平均値**または**条件付期待値**とよぶ。
(2) $A\in\mathcal{F}$ に対し $P(A|\mathcal{G}):=E[1_A|\mathcal{G}]$ とおいて、これを A の**条件付確率**とよぶ。

条件付期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ や条件付確率 $P(A|\mathcal{G})$ は確率変数であることに注意する。

[7]連続関数の空間の compact 部分集合の特徴付ける定理 (微分方程式の講義で部分的に示した)。

命題 2.1 $X, Y, X_n, n \in \mathbb{N}$ は可積分な確率変数とする。

(1) $\forall a, b \in \mathbf{R}$ に対し、$E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$ *a.s.* である。

(2) $X \geq 0$ *a.s.* ならば $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ *a.s.* である。

(3) X が $\mathcal{G}$-可測で、積 XY が可積分ならば $E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}]$ *a.s.*
特に、$E[X|\mathcal{G}] = X$ *a.s.* である。

(4) $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族で $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ とすれば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ *a.s.*
特に、$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$ である。

(5) *(Jensen* の不等式*)* ψ が $\mathbf{R}$ 上の下に凸な関数で、$\psi(X)$ が可積分ならば
$\psi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\psi(X)|\mathcal{G}]$ *a.s.*

(6) $X_n \to X$ *in* L^1 ならば $E[X_n|\mathcal{G}] \to E[X|\mathcal{G}]$ *in* L^1 である。

(7) X と $\mathcal{G}$ が独立ならば $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ *a.s.* である。

次に正則条件付確率について述べる。

条件付確率は、互いに素な $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ に対して $P(A_1 \cup A_2|\mathcal{G}) = P(A_1|\mathcal{G}) + P(A_2|\mathcal{G})$ a.s. を満たすが、この除外集合は A_1, A_2 に依存し、一般には完全加法制をもたない。しかし、標本空間が "良い空間" の場合条件付確率として以下のような都合の良い性質をもつものが取れることが知られている。

定義 2.2 次の条件を満たす系 $p = \{ p(\omega, A)\,;\, \omega \in \Omega, A \in \mathcal{F} \}$ が存在するとき、p を $\mathcal{G}$ の下での P の**正則条件付確率**という。

(1) $\forall \omega \in \Omega$ を固定すると $p(\omega, \cdot\,)$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度である。

(2) $\forall A \in \mathcal{F}$ を固定すると $p(\,\cdot\,, A)$ は $\mathcal{G}$-可測関数である。

(3) $P(A \cap B) = \displaystyle\int_B p(\omega, A)\, P(d\omega)$, $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{G}$.

$(\Omega, \mathcal{F})$ が標準可測空間[8]、例えば Ω がポーランド空間で $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ のときは、正則条件付確率が存在することが知られている。ここでは、その結果のみ紹介する。証明は [IW] p.13–, または [SV] p.12– を見よ。ただし、[SV] ではポーランド空間の場合のみに限り証明を与えており、また、正則条件付確率を "conditional probability distribution" と呼び次の定理 2.2 の後者を満たす場合を "regular" と読んでいる。

定理 2.2 $(\Omega, \mathcal{F})$ は標準可測空間で P は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度であるとする。$\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族であるとき、$\mathcal{G}$ の下での P の正則条件付確率 $p = \{ p(\omega, A)\,;\, \omega \in \Omega, A \in \mathcal{F} \}$ が唯一つ存在する。特に、$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族で可算生成であれば、$\mathcal{G}$-可測な零集合 N が存在して、$\omega \notin N$ ならば $p(\omega, A) = 1_A(\omega)$, $\forall A \in \mathcal{H}$ となるようにできる。

2.2 Stopping time

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された filtration とし、次の仮定をおく。

仮定 F $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ は右連続で零集合を含む。即ち、$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ $(\forall t \geq 0)$ で $\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F}\,;\, P(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_t$.

定義 2.3 $\sigma : \Omega \to [0, \infty]$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に関する *stopping time (*あるいは *Markov* 時刻*)* であるとは

$$\{\sigma \leq t\} \equiv \{ \omega\,;\, \sigma(\omega) \leq t \} \in \mathcal{F}_t, \qquad \forall t \geq 0$$

が成立するときにいう。

[8] 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ が、$\{1, \ldots, n\}, \mathbb{N}, [0, 1]$ のどれかと Borel 同型のとき、即ち、Ω からこれらのどれかの集合 (σ-加法族は Borel 集合族を考える) への全単射 φ で、φ, φ^{-1} がともに可測であるものが存在するとき、標準可測空間という。

命題 2.3 次の *(i)–(iv)* は互いに同値である。

(i) σ は *stopping time.*

(ii) $\{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0.$

(iii) $\{\sigma > t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0.$

(iv) $\{\sigma \geq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0.$

証明: (i) と (iii), (ii) と (iv) の同値性は明らか。(i) $\Rightarrow$ (ii) は

$$\{\sigma < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\sigma \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$$

による。(ii) $\Rightarrow$ (i) は

$$\{\sigma \leq t\} = \cap_{n=N}^{\infty}\{\sigma < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_{t+1/N}$$

が任意の $\forall N \in \mathbb{N}$ で成立するので、$(\mathcal{F}_t)$ の右連続性から従う。 $\square$

命題 2.4 $\sigma, \tau, \sigma_n,\ n \in \mathbb{N}$ を *stopping time* とする。

(i) $\sigma + \tau,\ \sigma \vee \tau,\ \sigma \wedge \tau$ はいずれも *stopping time.*

(ii) $\sigma_n \leq \sigma_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ または $\sigma_n \geq \sigma_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ は *stopping time.*

証明: それぞれ次に注意すればよい。ただし、$\mathbb{Q}_t = (\mathbb{Q} \cap [0, t]) \cup \{t\}$ とした。

(i) $\{\sigma + \tau \leq t\} = \cap_{n=N}^{\infty} \cup_{r \in \mathbb{Q}_t} [\{\sigma \leq r\} \cap \{\tau \leq t - r + 1/n\}],\ \forall N \in \mathbb{N}.$

$\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\},\ \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}.$

(ii) $\{\sigma_n\}$ が単調増加のとき $\{\lim_{n\to\infty} \sigma_n \leq t\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\sigma_n \leq t\},$

$\{\sigma_n\}$ が単調減少のとき $\{\lim_{n\to\infty} \sigma_n < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\sigma_n < t\}.$ $\square$

例 2.1 (X_t) を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $(\mathcal{F}_t)$-適合な d 次元連続確率過程として、X の $E \subset \mathbf{R}^d$ への到達時間 *(first hitting time)* を

$$\sigma_E(\omega) = \inf\{\, t > 0\,;\, X_t(\omega) \in E\,\} \tag{2.1}$$

で定義する。E が開集合または閉集合ならば σ_E は *stopping time* である。一般に確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が完備ならば $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ に対し σ_E は *stopping time* であることが知られている[9]。

証明: ここでは E が開集合か閉集合のときのみを示す。E が開集合のときは

$$\{\sigma_E < t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)}\{X_r \in E\} \in \mathcal{F}_t$$

より分かる。E が閉集合のとき、$E_n = \{\, x \in \mathbf{R}^d\,;\, d(x, E) < \frac{1}{n}\,\}$ とおくと、各 E_n は開集合であるから σ_{E_n} は stopping time. 一方、$E_n \downarrow E$ であるから、$\sigma_{E_n}(\omega) \uparrow \sigma_E(\omega),\ \forall \omega \in \Omega$ となり、命題 2.4 (ii) と合わせ σ_E は stopping time を得る。 $\square$

定義 2.4 *stopping time* σ に対して

$$\mathcal{F}_\sigma = \{\, A \in \mathcal{F}\,;\, \forall t \geq 0 \text{ に対し } A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t\,\} \tag{2.2}$$

とおく。

問 2.1 σ が *stopping time* のとき *(2.2)* で定義した $\mathcal{F}_\sigma$ が σ-加法族をなすことを示せ。また、$\sigma \equiv t$ *(定数)* のとき、*(2.2)* で定義した $\mathcal{F}_\sigma$ と $\mathcal{F}_t$ が一致することを示せ。

[9]証明は次の本の p.51 を見よ。C.Dellacherie: Capacités et Processus Stochatiques. Springer, 1972.

命題 2.5 $\sigma, \tau, \sigma_n,\ n \in \mathbb{N}$ を *stopping time* とする。

(i) σ は $\mathcal{F}_\sigma$-可測である。

(ii) $\sigma \le \tau$ ならば、$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(iii) *(右連続性の一般化)* $\forall \omega \in \Omega$ に対し $\sigma_n(\omega) \downarrow \sigma(\omega)$ ならば、$\cap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\sigma_n} = \mathcal{F}_\sigma$.

証明: (i): $\{\sigma \le s\} \in \mathcal{F}_\sigma, \forall s \ge 0$ を示せば良い。このためには $\{\sigma \le s\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0$ を示せば良いが、$\{\sigma \le s\} \cap \{\sigma \le t\} = \{\sigma \le t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t\wedge s} \subset \mathcal{F}_t$ だから示された。
(ii): $A \in \mathcal{F}_\sigma$ とする。このとき、$A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t, \{\sigma \le t\} \supset \{\tau \le t\}$ より、$A \cap \{\tau \le t\} = [A \cap \{\sigma \le t\}] \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0$ となるから $A \in \mathcal{F}_\tau$ を得る。
(iii): (ii) より "$\supset$" は従う。逆に $A \in \cap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\sigma_n}$ とすると、$A \cap \{\sigma < t\} = \cup_{n=1}^\infty A \cap \{\sigma_n < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0$ となるから $A \in \mathcal{F}_\sigma$ を得る ($cf.$ 命題 2.3 の証明 (ii) $\Rightarrow$ (i))。 □

2.3 Martingales

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と、仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ が与えられているとする。

定義 2.5 右連続な *(実数値)* 確率過程 $X = (X_t)_{t\ge 0}$ が $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ について**マルチンゲール** *(martingale)* とは

(i) $\forall t \ge 0$ に対し $E[|X_t|] < \infty$.

(ii) $X = (X_t)_{t\ge 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-*adapted.*

(iii) $\forall 0 \le s \le t$ に対し $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s\ a.s.$

の *3* 条件を満たすときにいう。条件 *(iii)* で $E[X_t|\mathcal{F}_s] \ge X_s\ a.s.$ が成立するとき X を**劣マルチンゲール** *(submartingale)*, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \le X_s\ a.s.$ のとき X を**優マルチンゲール** *(supermartingale)* という。

問 2.2 *1* 次元 *Brown* 運動 $B = (B_t)$ に対し $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s ; 0 \le s \le t\} \vee \mathcal{N}$ とおく。定理 *1.11* で見たように $(\mathcal{F}_t^B)$ は仮定 F を満たす。このとき、命題 *1.6 (3)* で見たように次の *(1)* が成り立つ。次の *(2), (3)* が成立することを示せ。
(1) (B_t) は $(\mathcal{F}_t^B)$ に関してマルチンゲール。
(2) $X_t = B_t^2 - t$ とおくと、(X_t) は $(\mathcal{F}_t^B)$ に関してマルチンゲール。
(3) $\sigma \in \mathbf{R}$ に対し $Y_t = e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ とおくと、(Y_t) は $(\mathcal{F}_t^B)$ に関してマルチンゲール。

問 2.3 $p \ge 1$ とする。$X = (X_t)$ がマルチゲールまたは非負劣マルチンゲールで p 乗可積分であるとき、$(|X_t|^p)$ は劣マルチンゲールであることを示せ。

定理 2.6 *(***Doob の不等式***)* *(i)* $X = (X_t)$ は劣マルチンゲールとし、$\lambda > 0, p > 1$ とする。このとき、

$$P\Big(\sup_{0\le s\le t} X_s \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda} E\Big[X_t,\ \sup_{0\le s\le t} X_s \ge \lambda\Big]$$

(ii) *(i)* で特に、$\forall t \ge 0$ に対して $X_t(\omega) \ge 0\ a.s.$ ならば

$$P\Big(\sup_{0\le s\le t} X_s \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda} E\Big[X_t\Big].$$

(iii) X が $E[|X_t|^p] < \infty,\ t \ge 0$ を満たすマルチンゲール、または非負劣マルチンゲールならば、

$$E\Big[\sup_{0\le s\le t} |X_s|^p\Big] \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E[|X_t|^p].$$

証明: $t_k = kt/n$ とすると $(X_{t_k})_k$ は離散劣マルチンゲールとなる。ここで、$\sigma = \min\{t_k ; X_{t_k} \ge \lambda\}$ とおくと、これは stopping time で、$\{\max_{1\le k\le n} X_{t_k} \ge \lambda\} = \{\sigma \le t_n\}$ となる。よって、

$$P\Big(\max_{1\le k\le n} X_{t_k} \ge \lambda\Big) = P(\sigma \le t_n) \le \frac{1}{\lambda} E[X_\sigma, \sigma \le t_n].$$

ここで、最後の不等式では事象 $\{\sigma \le t_n\}$ 上で $X_\sigma \ge \lambda$ となることを用いた。ところで、右辺の期待値は更に

$$E[X_\sigma, \sigma \le t_n] = \sum_{k=0}^{n} E[X_{t_k}, \sigma = t_k] \le \sum_{k=0}^{n} E[X_{t_n}, \sigma = t_k] = E[X_{t_n}, \sigma \le t_n]$$

となる。よって、

$$P\Big(\max_{1\le k\le n} X_{t_k} \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda} E\Big[X_t, \max_{1\le k\le n} X_{t_k} \ge \lambda\Big]$$

を得る。(X_t) は右連続であるから、$n \to \infty$ として (i) を得る。(ii) は (i) から、ただちに従う。(iii) を示すために $Y = \sup_{0\le s\le t} |X_s|$, $Y_M = Y \wedge M$, $M > 0$, とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
E[Y_M^p] &= p\int_0^M \lambda^{p-1} P(Y \ge \lambda)\, d\lambda \le p\int_0^M \lambda^{p-1}\frac{1}{\lambda} E[|X_t|, Y \ge \lambda]\, d\lambda \qquad \text{((i) を用いた)}\\
&= p\int_0^M \lambda^{p-2}\, d\lambda \int_\Omega |X_t| 1_{\{Y\ge\lambda\}}\, dP = \frac{p}{p-1} E[Y_M^{p-1}|X_t|] \qquad \text{(Fubini の定理を用いた)}\\
&\le \frac{p}{p-1} E[Y_M^p]^{(p-1)/p} E[|X_t|^p]^{1/p} \qquad \text{(Hölder の不等式)}
\end{aligned}$$

ここで、$E[Y_M^p] \le M^p$ に注意して最後に両辺を $E[Y_M^p]^{(p-1)/p}$ で割り、p 乗すれば、$E[Y_M^p] \le (\frac{p}{p-1})^p E[|X_t|^p]^{1/p}$ となり、単調収束定理を用いて $M \uparrow \infty$ として (iii) は得られる。 □

定理 2.7 *(***Doob の任意抽出定理** *(optional sampling theorem))* σ, τ を有界な *stopping time* で $\sigma \le \tau$ とする。このとき $X = (X_t)$ が劣マルチンゲールならば

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \ge X_\sigma \quad a.s. \tag{2.3}$$

となる。特に、$X = (X_t)$ がマルチンゲールならば *(2.3)* で等号が成立する。ただし X_τ は $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$ により定義される確率変数を表す。X_σ も同様である。

証明: 第 1 段: まず σ, τ が有限個の値 $t_0, t_1, \dots, t_n$ をのみとる時を考える。($t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ とする。)

$$M_{t_k} = X_{t_0} + \sum_{l=1}^{k} \{X_{t_l} - E[X_{t_l} | \mathcal{F}_{t_{l-1}}]\}$$

とし、$A_{t_k} = X_{t_k} - M_{t_k}$ とおくと、$(M_{t_k})_k$ は離散マルチンゲールとなり、また A_{t_k} は $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-可測であり X は劣マルチンゲールであるから $A_{t_k} \ge A_{t_{k-1}}$ a.s. となる[10]。このとき、$\forall B \in \mathcal{F}_\sigma$ とすると、$B \in \mathcal{F}_\tau$ でもあるので $B \cap \{\tau = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$. よって、

$$\begin{aligned}
E[M_\tau, B] &= \sum_{k=0}^{n} E[M_{t_k}, B\cap\{\tau = t_k\}] = \sum_{k=0}^{n} E[E[M_{t_n}|\mathcal{F}_{t_k}], B\cap\{\tau = t_k\}]\\
&= \sum_{k=0}^{n} E[M_{t_n}, B\cap\{\tau = t_k\}] = E[M_{t_n}, B].
\end{aligned}$$

同様に $E[M_\sigma, B] = E[M_{t_n}, B]$ も示される。よって、$E[M_\tau, B] = E[M_\sigma, B]$, $\forall B \in \mathcal{F}_\sigma$, で M_σ は $\mathcal{F}_\sigma$-可測だから[11]、$E[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma$ a.s. 一方、$\tau \ge \sigma$ より $A_\tau \ge A_\sigma$ となるから

$$E[A_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \ge E[A_\sigma|\mathcal{F}_\sigma] = A_\sigma \qquad \text{a.s.}$$

以上より、$E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \ge X_\sigma$ a.s. を得る。

[10] これは離散マルチンゲールの Doob 分解となっている。

[11] $\forall a \in \mathbf{R}$ と $\forall k$ に対し $\{M_\sigma \le a\} \cap \{\sigma \le t_k\} = \bigcup_{l=0}^{k} \{M_{t_l} \le a, \sigma = t_l\} \in \mathcal{F}_{t_k}$ となるので、$\{M_\sigma \le a\} \in \mathcal{F}_\sigma$. したがって、$M_\sigma$ は $\mathcal{F}_\sigma$-可測。同様に A_σ も $\mathcal{F}_\sigma$-可測となる。

第2段: $\sigma_n(\omega)=\frac{[2^n\sigma(\omega)]+1}{2^n}, \tau_n(\omega)=\frac{[2^n\tau(\omega)]+1}{2^n}$ とおくと、これらも stopping time となる (*cf*. 問題2.4)。σ,τ は有界だから σ_n,τ_n は有限個の値しか取らないので第1段により

$$E[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}]\geq X_{\sigma_n}\quad \text{a.s.}$$

となる。故に $\mathcal{F}_\sigma\subset\mathcal{F}_{\sigma_n}$ であるから、$\forall A\in\mathcal{F}_\sigma$ に対し

$$E[X_{\tau_n},A]\geq E[X_{\sigma_n},A]$$

を得る。$\sigma_n(\omega)\downarrow\sigma(\omega),\tau_n(\omega)\downarrow\tau(\omega)$ と (X_t) の右連続性により、もし $\{X_{\tau_n}\}_n,\{X_{\sigma_n}\}_n$ がともに一様可積分であれば[12]、$E[|X_{\tau_n}-X_\tau|]\to 0$, $E[|X_{\sigma_n}-X_\sigma|]\to 0$ $(n\to\infty)$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}E[X_{\tau_n},A]=E[X_\tau,A],\qquad \lim_{n\to\infty}E[X_{\sigma_n},A]=E[X_\sigma,A]$$

となり結論が得られる。X は劣マルチゲールだから $E[X_{\tau_n}]\geq E[X_{\tau_{n+1}}]$, $n\in\mathbb{N}$ となり、$\inf_n E[X_{\tau_n}]\geq E[X_0]>-\infty$ とできる。これより $\forall\varepsilon>0$ に対して $N\in\mathbb{N}$ を $E[X_{\tau_N}]<\inf_n E[X_{\tau_n}]+\varepsilon$ ととれる。よって、$\lambda>0$ に対して $n\geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
E[|X_{\tau_n}|,|X_{\tau_n}|>\lambda] &= E[X_{\tau_n},X_{\tau_n}>\lambda]+E[X_{\tau_n},X_{\tau_n}\geq-\lambda]-E[X_{\tau_n}]\\
&\leq E[X_{\tau_N},X_{\tau_n}>\lambda]+E[X_{\tau_N},X_{\tau_n}\geq-\lambda]-E[X_{\tau_N}]+\varepsilon\leq E[|X_{\tau_N}|,|X_{\tau_n}|>\lambda]+\varepsilon,\\
P(|X_{\tau_n}|>\lambda) &\leq \frac{1}{\lambda}E[|X_{\tau_n}|]=\frac{1}{\lambda}(2E[X_{\tau_n}\vee 0]-E[X_{\tau_n}])\leq\frac{1}{\lambda}(2E[X_{\tau_N}\vee 0]-\inf_n E[X_{\tau_n}]).
\end{aligned}$$

最後の不等式は $(X_t\vee 0)_{t\geq 0}$ が列マルチンゲールになることを用いた。よって、$\sup_{n\geq N}P(|X_{\tau_n}|>\lambda)\to 0$ $(\lambda\to\infty)$ であるから、$\{X_{\tau_n}\}_n$ は一様可積分となる。$\{X_{\sigma_n}\}_n$ についても同様に示される。 □

注意 2.1 定理 *2.7* で σ,τ が有界という仮定は本質的である。例えば、原点から出発する *1* 次元連続確率過程 (X_t) に対し、$\sigma:=0,\tau:=\sigma_{\{1\}}$ *(*点 1 への到達時刻*)* ととる。このとき、$\tau<\infty$ *a.s.* ならば *(*実際に *Brown* 運動ではそうなる *cf*. 例 *2.2)* $X_\sigma=0,X_\tau=1$ *a.s.* だから、定理 *2.7* の結論は成立しない。

問 2.4 定理 *2.7* の証明第 *2* 段で定義した σ_n,τ_n が *stopping time* となることを示せ。

マルチンゲール性の応用として、$\mathbf{R}$ の内部から出発するとき a,b のどちらの端から脱出するのかその確率を求めよう。

命題 2.8 連続マルチンゲール $M=(M_t)$ が $M_0=x\in(a,b)$ で $\tau:=\sigma_{[a,b]^c}<\infty$ *a.s.* を満たすならば

$$P(M_\tau=a)=\frac{b-x}{b-a},\quad P(M_\tau=b)=\frac{x-a}{b-a}. \tag{2.4}$$

証明: M はマルチンゲールだから任意抽出定理により $x=E[M_{\tau\wedge t}]$, $t>0$ である。$|M_{\tau\wedge t}|\leq|a|\vee|b|$ である Lebesgue の収束定理により $t\to\infty$ のとき $\tau<\infty$ a.s. だから

$$x=E[M_\tau]=aP(M_\tau=a)+bP(M_\tau=b)$$

を得る。一方 $\tau<\infty$ a.s. より $P(M_\tau=a)+P(M_\tau=b)=1$. これを連立させて解いて (2.4) を得る。 □

例 2.2 $x\in(a,b)$ から出発する *1* 次元 *Brown* 運動 $B=(B_t)$ について $\tau:=\sigma_{[a,b]^c}<\infty$ *a.s.* となる。更に $c\in\mathbf{R}$ に対して $\sigma_{\{c\}}<\infty$ *a.s.* となる。

[12]次の定理が成り立つことが知られている (*cf*. [F1, p.69] 定理 2.57)。
定理 各 X_n は可積分で、X_n は X に概収束すると仮定する。このとき、次の 3 条件は互いに同値である。
1) $\{X_n\}$ は一様可積分、即ち、$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_n E[|X_n|,|X_n|\geq\lambda]=0$.
2) $\lim_{n\to\infty}E[|X_n-X|]=0$.
3) $\lim_{n\to\infty}E[|X_n|]=E[|X|]$ かつ $E[|X|]<\infty$.

証明: 問 2.2 (ii) より $B_t^2 - t$ はマルチンゲールだから、任意抽出定理より

$$E[\tau \wedge t] = E[B_{\tau\wedge t}^2] \le (|a| \vee |b|)^2, \quad \forall t \ge 0$$

となる。$t \to \infty$ として Fatou の補題より $E[\tau] \le (|a| \vee |b|)^2$ となり、$\tau < \infty$ a.s. が従う。特に (2.4) が成立することがわかるが、ここで $b \to \infty$ とすれば $P(B_{\sigma_{\{a\}}} = a) = 1$, $a \to -\infty$ とすれば $P(B_{\sigma_{\{b\}}=b}) = 1$ を得るので、$\forall c \in \mathbf{R}$ に対して $\sigma_{\{c\}} < \infty$ a.s. も従う。 □

マルチンゲールの重要な性質として次がある。ここでは離散時間の場合を紹介することとする[13]。

定理 2.9 *(**上向き横断不等式**)* $X = (X_n)$ を離散時間の劣マルチンゲール、$a < b$ とし、$\sigma_0 = 0$, $\sigma_{2m-1} = \min\{n > \sigma_{2m-2}; X_n \le a\}$, $\sigma_{2m} = \min\{n > \sigma_{2m-1}; X_n \ge b\}$, $m = 1, 2, \dots$ とおく。ただし、$\min \emptyset = \infty$ と定める。このとき、X の $[a, b]$ の上向き横断回数 $U_n^{a,b}$ を

$$U_n^{a,b} = \max\{m; \sigma_{2m} \le n\}$$

と定義する。ただし、$\max \emptyset = 0$ と定める。このとき、各 n に対して

$$E[U_n^{a,b}] \le \frac{1}{b-a} E[(X_n - a) \vee 0]$$

が成り立つ。

証明: 問 2.3 と同様に命題 2.1(5) により $Y_n = (X_n - a) \vee 0$ とおくと、(Y_n) は劣マルチンゲールとなる。このとき、

$$H_k = \begin{cases} 1, & \sigma_{2m-1} < k \le \sigma_{2m} \text{ を満たす } m \ge 1 \text{ が存在するとき} \\ 0, & \text{上記のような } m \text{ が存在しないとき} \end{cases}$$

とおくと、$(b-a)U_n^{a,b} \le \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1})$ となる。また、

$$\{H_k = 1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\sigma_{2m-1} < k \le \sigma_{2m}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} [\{\sigma_{2m-1} < k\} \cap \{\sigma_{2m} < k\}^c] \in \mathcal{F}_{k-1}$$

である。従って、$E[Y_k - Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] \ge 0$ であるから

$$\begin{aligned} E[\sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1})] &= \sum_{k=1}^n E[Y_k - Y_{k-1}, H_k = 1] = \sum_{k=1}^n E[E[Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}], H_k = 1] \\ &\le \sum_{k=1}^n E[E[Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]] = \sum_{k=1}^n E[Y_k - Y_{k-1}] = E[Y_n] - E[Y_0] \end{aligned}$$

となり、$E[Y_0] \ge 0$ であるから、与式を得る。 □

定理 2.10 *(**マルチンゲールの収束定理**)* 離散時間の劣マルチンゲール $X = (X_n)$ が $\sup_{n\ge 0} E[X_n \vee 0] < \infty$ を満たせば、X_n は $n \to \infty$ のときある確率変数 X_∞ に概収束し、X_∞ は可積分である。さらに、(X_n) が一様可積分であれば、$E[|X_n - X_\infty|] \to 0$ *(*$n \to \infty$*)* であり、$E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \ge X_n$ *a.s.* となる。

証明: $P(\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n) > 0$ と仮定する。このとき、

$$\left\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\right\} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}:a<b} \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\right\}$$

であるから、ある $a < b$ があって $P(\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n) > 0$ となる。これは、定理 2.9 の記号を用い、$U_\infty^{a,b} := \lim_{n\to\infty} U_n^{a,b}$ とする (この極限は $U_n^{a,b}$ の単調増加性より存在する) と、$P(U_\infty^{a,b} = \infty) > 0$ となることを意味している。一方、定理 2.9 により

$$E[U_n^{a,b}] \le \frac{1}{b-a} E[(X_n - a) \vee 0] \le \frac{1}{b-a}(E[X_n \vee 0] + |a|) \le \frac{1}{b-a}(\sup_n E[X_n \vee 0] + |a|)$$

[13]定理 2.9 で連続時間の場合は、例えば [S] D.W.Stroock: Lectures on Stochastic Analysis: Diffuion Theory の p.34 にある。([KS] §1.3 定理 3.8 (iii) にもあるが、証明はかなり略されている。) 定理 2.10 は [KS] §1.3 定理 3.15.

であるから、単調収束定理により $E[U_\infty^{a,b}] < \infty$ となり、これは矛盾である。よって、$\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n$ なるとき、$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$, それ以外では $X_\infty = 0$ とおけば、$X_\infty \in [-\infty, \infty]$ であるが、$\{X_n\}$ は X に a.s. に収束する。一方、$E[|X_n|] = 2E[X_n \vee 0] - E[X_n] \leq 2\sup_n E[X_n \vee 0] - E[X_0] < \infty$ であるから、Fatou の補題によって、

$$E[|X_\infty|] = E[\lim_{n\to\infty} |X_n|] \leq \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|] \leq \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

となるので、X_∞ は可積分で、特に $|X_\infty| < \infty$ a.s. となり、確率変数であることも従う。

$E[|X_n - X_\infty|] \to 0$ $(n \to \infty)$ は、一様可積分性の性質 (p.18 脚注) から直ちに従う。よって、命題 2.1(5) により、

$$E[|E[X_n|\mathcal{F}_m] - E[X_\infty|\mathcal{F}_m]|] \leq E[|X_n - X_\infty|] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるので、必要ならば部分列をとることで、$E[X_\infty|\mathcal{F}_m] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{F}_m] \geq X_m$ a.s. を得る。 □

2.4 Brown 運動の強 Markov 性

ここでは d 次元 Brown 運動を考える。このため、§1.4 のように、$x \in \mathbf{R}^d$ から出発する Brown 運動の $(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 上に定める分布を P_x とし、確率過程 (標準座標関数) $B_t(w) = w_t$, $w \in W^d$, $t \geq 0$ と filtration $(\mathcal{F}_t)$ が与えられているとする。ただし、ここでは $(\mathcal{F}_t)$ は右連続で $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B}(W^d); P_x(N) = 0, \forall x \in \mathbf{R}^d\}$ を含むとする。

$(\mathcal{F}_t)$ に関する stopping time σ に対し、時間を σ だけずらすシフト作用素 $\theta_\sigma : W^d \cap \{\sigma < \infty\} \to W^d$ を $(\theta_\sigma w)_t := w_{t+\sigma(w)}$, $t \geq 0$ によって定義する。このとき、定理 1.10, 1.11 はランダムな時間の場合に拡張される。

定理 2.11 *(強 Markov 性)* $\forall x \in \mathbf{R}^d$ と $\forall Y = Y(w)$: W^d 上の有界 $\mathcal{B}(W^d)$-可測関数に対し

$$E_x[Y \circ \theta_\sigma|\mathcal{F}_\sigma] = E_{B_\sigma}[Y], \quad P_x\text{-}a.s.\ w \in \{\sigma < \infty\}. \tag{2.5}$$

証明: 定理 1.10, 1.11 の証明と同様に $\forall f \in C_b(\mathbf{R}^d)$ とし $Y = f(B_t)$ に対し (2.5) を、即ち、

$$E_x[f(B_{t+\sigma}), A \cap \{\sigma < \infty\}] = E_x[E_{B_\sigma}[f(B_t)], A \cap \{\sigma < \infty\}], \quad A \in \mathcal{F}_\sigma$$

を証明すればよい。定理 2.7 と同様に、σ を離散化し $\sigma_n = ([2^n\sigma] + 1)/2^n$ を考える。σ_n も stopping time だから、$\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$ をとれば

$$E_x[f(B_{t+\sigma_n}), A \cap \{\sigma < \infty\}] = \sum_{k=1}^{\infty} E_x[f(B_{t+\sigma_n}), A \cap \{\sigma_n = k/2^n\}] \tag{2.6}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_x[E_{B_{\sigma_n}}[f(B_t)], A \cap \{\sigma_n = k/2^n\}] = E_x[E_{B_{\sigma_n}}[f(B_t)], A \cap \{\sigma < \infty\}]. \tag{2.7}$$

ここで第 2 の等号は $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ であるから $A \cap \{\sigma_n = k/2^n\} \in \mathcal{F}_{k/2^n}$ に注意して Brown 運動の Markov 性を用いた。

$\{\sigma < \infty\}$ 上では $\sigma_n \downarrow \sigma$ であることに注意する。f, B_t の連続性から Lebesgue の収束定理より (2.6) の左辺は $E_x[f(B_{t+\sigma}), A \cap \{\sigma < \infty\}]$ に収束する。一方、(1.1) により

$$E_{B_{\sigma_n}}[f(B_t)] = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)p(t, x - B_{\sigma_n})\,dx \to \int_{\mathbf{R}^d} f(x)p(t, x - B_\sigma)\,dx = E_{B_\sigma}[f(B_t)]$$

を得る。よって、(2.7) の右辺は $E_x[E_{B_\sigma}[f(B_t)], A \cap \{\sigma < \infty\}]$ に収束するので証明は完了した。 □

例 2.3 *(反射原理)* 原点から出発する *1* 次元 *Brown* 運動 B_t について、$m_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s$ とおけば $\forall a \geq 0, x \geq 0, t > 0$ の対し

$$P(B_t < a - x, m_t \geq a) = P(B_t > a + x).$$

証明: 点 a への到達時間 $\sigma := \sigma_{\{a\}}$ は stopping time だから、強 Markov 性より

$$\begin{aligned}
&P(B_t > a+x) = P(\sigma \le t, B_t > a+x) \\
&= E[P_{B_\sigma}(B_{t-\sigma} > a+x), \sigma \le t] = E[P_{B_\sigma}(B_{t-\sigma} < a-x), \sigma \le t] \\
&= P(\sigma \le t, B_t < a-x) = P(B_t < a-x, m_t \ge a).
\end{aligned}$$

2 行目の等号は $\{\sigma \le t\}$ 上で $B_\sigma = a$ なることと対称性: $P_a(B_{t-\sigma} > a+x) = P_a(B_{t-\sigma} < a-x)$ を用いた。 □

例 2.4 原点から出発する *1* 次元 *Brown* 運動 B_t について

$$P(\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a) = 2P(B_t \ge a), \qquad \forall a \ge 0, t > 0.$$

証明: $P(m_t \ge a) = P(B_t < a \le m_t) + P(B_t \ge a)$ であるが、例 2.3 を $x = 0$ として用いると右辺第 1 項は $P(B_t > a)$ に等しいので $P(B_t = a) = 0$ だから結論を得る。 □

問 2.5 原点から出発する *1* 次元 *Brown* 運動 B_t について、点 $a \ne 0$ への到達時間 $\sigma_{\{a\}} := \inf\{\, t > 0\,;\, B_t = a\,\}$ の確率密度関数が $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$, $t > 0$ となることを示せ。

2.5 2 次変分

以下、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ が与えられているとする。

定義 2.6 劣マルチンゲール $X = (X_t)$ がクラス *(DL)* に属するとは、任意の $a > 0$ に対して $\{\, X_{\sigma\wedge a}\,;\, \sigma$ は *stopping time*$\,\}$ が一様可積分になるときをいう。

定理 2.12 *(***Doob-Meyer 分解***)* 劣マルチンゲールがクラス *(DL)* に属するならば、マルチンゲール (M_t) と $A_0 = 0$ となる $(\mathcal{F}_t)$-適合な右連続増加過程 (A_t) が存在し、$X_t = M_t + A_t$, $t \ge 0$ とできる。ここで、(A_t) は自然増加過程にとれる。さらに、(A_t) を自然増加過程ととるときこのような分解は一意である。

ここで、(A_t) が増加とは $t \le s$ ならば $A_t \le A_s$ a.s. なるときをいい、自然増加過程であるとは、任意の有界マルチンゲール (M_t) に対して $E[\int_{(0,t]} M_s dA_s] = E[\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s]$ なるときにいう。

ここでは、連続なマルチンゲール (M_t) に対して $X_t = M_t^2$ から定まる (X_t) に限り Doob-Meyer 分解の証明を与える[14]。もし、M_t が 2 乗可積分ならば問 2.3 より (X_t) は劣マルチンゲールであり、任意の stopping time σ に対して

$$E[|X_{\sigma\wedge a}|, |X_{\sigma\wedge a}| \ge \lambda] \le E[|X_a|, |X_{\sigma\wedge a}| \ge \lambda] \le E\Big[|X_a|, \sup_{0\le t\le a} |X_t| \ge \lambda\Big].$$

一方、Doob の不等式 (ii) より $P(\sup_{0\le t\le a} |X_t| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda} E[|X_a|] \to 0$ となり、上式の右辺 $\to 0$ がわかり、(X_t) がクラス (DL) に属することが証明される。またこの場合、増加過程 A_t は連続となるので "自然" である。

まず記号を導入する: 確率過程 (A_t) が $A_0 = 0$ a.s., $(\mathcal{F}_t)$-adapted で連続かつ $A_{t_1} \le A_{t_2} < \infty$ a.s., $t_1 < t_2$ なるものを連続増加過程といい、連続増加過程全体を $\mathcal{A}_{+,c}$ で表す。また、

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c &:= \{\, A^1 - A^2\,;\, A^1, A^2 \in \mathcal{A}_+ \,\} \\
\mathcal{M}_c^p &:= \{\, M = (M_t)\,;\, M \text{ は連続マルチンゲールで } E[|M_t|^p] < \infty, \forall t \ge 0 \,\} \quad p \ge 1,
\end{aligned}$$

とおく。$A \in \mathcal{A}_c$ であれば、a.a. $\omega \in \Omega$ で $A_t(\omega)$ が有界変動であることに注意する。

[14] ここでは [N] 長井英生: 確率微分方程式 共立出版 にある証明を紹介する。一般の場合は [KS] §1.4 を参照せよ。

以下、連続な局所マルチンゲール (定義 2.7) M に対して、$M^2 - \langle M \rangle$ が再び局所マルチンゲールになる連続増加過程 $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ が一意的に存在することを示す。この $\langle M \rangle$ を M の **2 次変分** (quadratic variation) とよぶ。

補題 2.13 $M = (M_t)$ が、$M \in \mathcal{M}_c^2 \cap \mathcal{A}_c$ であれば $M_t = M_0,\ \forall t\ a.s.$ である。

証明: $M_0 = 0$ としてよい。分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ をとり、$\|\Delta\| = \max_{1\le i\le n}\{t_i - t_{i-1}\}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} E[M_t^2] &= \sum_{i=1}^n E[M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2] = \sum_{i=1}^n E[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2] \\ &\le E\Big[\max_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|\Big] \end{aligned}$$

である。$M_t = A_t^1 - A_t^2 \in \mathcal{A}_c,\ A^1, A^2 \in \mathcal{A}_{+,c}$ とし、

$$\tau_k := \inf\{\, t > 0\,;\, A_t^1 + A_t^2 > k\,\} \qquad (\inf\emptyset = \infty \text{ とする})$$

と定める。このとき例 2.1 より τ_k は stopping time であるから定理 2.7 により $M_t^{\tau_k} := M_{t\wedge\tau_k}$ は連続マルチンゲールとなる。よって、$\sum_{i=1}^n |M_{t_i}^{\tau_k} - M_{t_{i-1}}^{\tau_k}| \le \sum_{i=1}^n (|A_{t_i\wedge\tau_k}^1 - A_{t_{i-1}\wedge\tau_k}^1| + |A_{t_i\wedge\tau_k}^2 - A_{t_{i-1}\wedge\tau_k}^2|) \le k$ であることと、各 $\omega \in \Omega$ に対し $M_s^{\tau_k}(\omega)$ が $[0,t]$ 上で一様連続であることから

$$E[(M_t^{\tau_k})^2] \le kE[\max_i |M_{t_i}^{\tau_k} - M_{t_{i-1}}^{\tau_k}|] \to 0 \quad \text{as } \|\Delta\| \to 0.$$

これより $M_t^{\tau_k} = 0$ a.s. $\forall k$ となり、$\tau_k \to \infty\ (k \to \infty)$ だから $M_t = 0$ a.s. を得る。 □

分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots$ に対して、 $t_n < t \le t_{n+1}$ のとき、

$$Q_t(M;\Delta) := \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_n})^2, \quad Q_0(M;\Delta) = 0$$

とおく。例えば Brown 運動の場合、命題 1.8 と同様に $Q_t(B;\Delta) \to t$ in L^2 がわかる。一方、問 2.2 (2) で見たように $B_t^2 - t$ はマルチンゲールになっている。次の定理はその一般化である。

定理 2.14 $M \in \mathcal{M}_c^4$ とする。このとき、$\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t) \in \mathcal{A}_{+,c}$ が存在して、$\|\Delta\| \to 0$ のとき $Q_t(M;\Delta) \to \langle M \rangle_t$ *in* $L^2,\ \forall t$ であり、かつ $M^2 - \langle M \rangle$ はマルチンゲールとなる。また、$M^2 - A$ がマルチンゲールとなるような $A \in \mathcal{A}_{+,c}$ は唯一つである。

補題 2.15 $M \in \mathcal{M}_c^4$ のとき $C > 0$ が存在し分割 Δ によらず $E[Q_t(M;\Delta)^2] \le C$ とできる。

証明: $|M_t| \le K,\ \exists K > 0$ のときにまず示す。$\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_l < t < \cdots$ とする。$s_{l+1} = t$ としておく。

$$\begin{aligned} Q_t(M;\Delta)^2 &= \Big\{\sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2\Big\}^2 = \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2\sum_{j<k} (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2 (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2 \\ &= \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2\sum_j (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2 (Q_t(M;\Delta) - Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)) \\ &= \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2\sum_j (Q_{s_{j+1}}(M;\Delta) - Q_{s_j}(M;\Delta))(Q_t(M;\Delta) - Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)) \end{aligned}$$

であるが、$E[Q_t(M;\Delta) - Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)|\mathcal{F}_{s_{j+1}}] = E[(M_t - M_{s_{j+1}})^2|\mathcal{F}_{s_{j+1}}]$ に注意すると

$$\begin{aligned}
E[Q_t(M;\Delta)^2] &= E\Big[\sum_{k=0}^{l}(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4\Big] + 2\sum_j E[(Q_{s_{j+1}}(M;\Delta) - Q_{s_j}(M;\Delta))(M_t - M_{s_{j+1}})^2] \\
&\le E\Big[\big(\max_{0\le j\le l}|M_{s_{j+1}} - M_{s_j}|^2 + 2\max_{0\le j\le l}|M_t - M_{s_{j+1}}|^2\big)Q_t(M;\Delta)\Big] \\
&\le 12K^2 E[Q_t(M;\Delta)] = 12K^2 E[M_t^2 - M_0^2] \le 12K^4.
\end{aligned}$$

ここで最後の等式はマルチンゲール性を用いた。一方、$M_t^* = \sup_{0\le s\le t}|M_s|$ とおくと、$\max_j |M_{s_{j+1}} - M_{s_j}|^2 \le 4(M_t^*)^2$ だから、上式より

$$E[Q_t(M;\Delta)^2] \le E[12(M_t^*)^2 Q_t(M;\Delta)] \le E[12^2(M_t^*)^4]^{1/2} E[Q_t(M;\Delta)^2]^{1/2}.$$

よって、両辺を 2 乗し $E[Q_t(M;\Delta)^2]$ で割り、Doob の不等式 (iii) を用いると

$$E[Q_t(M;\Delta)^2] \le 12^2 E[(M_t^*)^4] \le 12^2(4/3)^4 E[M_t^4] < \infty$$

を得る。一般の場合は $M_t^{(K)} := M_{\tau_K\wedge t}$, $\tau_K = \inf\{\, s\,;\, |M_s| > K\,\}$ とおいて、Fatou の補題を用いればよい。
□

補題 2.16 $Y^{(n)} = (Y_s^{(n)})_{s\in[0,T]}$ を $(\mathcal{F}_t)$-*adapted* な連続確率過程で

$$\lim_{n,m\to\infty} E\Big[\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n)} - Y_s^{(m)}|^2\Big] = 0$$

なるものとする。このとき、$(\mathcal{F}_t)$-*adapted* な連続確率過程 (Y_s) が存在し、$\{Y^{(n)}\}_n$ の適当な部分列 $\{Y^{(n_k)}\}_k$ を取れば

$$P\Big(\lim_{k\to\infty}\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_k)} - Y_s| = 0\Big) = 1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{k\to\infty} E\Big[\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_k)} - Y_s|^2\Big] = 0$$

とできる。

証明: $n_k \le n_{k+1}$ を $E\Big[\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n)} - Y_s^{(m)}|^2\Big] < 1/2^{3k}$, $n, m > n_k$ となるようにとる。このとき、

$$A_k := \Big\{\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_{k+1})} - Y_s^{(n_k)}| > \frac{1}{2^k}\Big\}$$

とすると、Chebyshev の不等式により

$$P(A_k) \le 2^{2k} E\Big[\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_{k+1})} - Y_s^{(n_k)}|^2\Big] < \frac{1}{2^k}.$$

よって、$\sum_k P(A_k) < \infty$ となり Borel-Cantelli の補題より $\Omega_0 = \cup_{m=1}^\infty \cap_{k=m}^\infty A_k^c$ とおくと $P(\Omega_0) = 1$. ここで $\omega \in \Omega_0$ ならばある $m = m(\omega)$ が存在して $\forall k \ge m$ に対し $\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_{k+1})} - Y_s^{(n_k)}| \le \frac{1}{2^k}$ だから $n_j \ge n_i \ge m$ に対して

$$\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_i)} - Y_s^{(n_j)}| \le \sum_{l=i}^{j-1}\frac{1}{2^l} \le \frac{1}{2^{i-1}}.$$

よって、$Y^{(n_k)}$ は $C([0,T])$ の Cauchy 列となり、ある連続確率過程 $Y = (Y_s)$ があって $\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_k)} - Y_s| \to 0$, $k\to\infty$. また、

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} E\Big[\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_k)} - Y_s|^2\Big] = \lim_{k\to\infty} E\Big[\lim_{j\to\infty}\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_k)} - Y_s^{(n_j)}|^2\Big] \\
&\le \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} E\Big[\sup_{0\le s\le T}|Y_s^{(n_k)} - Y_s^{(n_j)}|^2\Big] = 0
\end{aligned}$$

を得る。最後の不等号は Fatou の補題を用いた。 □

定理 2.14 の証明: (一意性) $M_t^2-A_t, M_t^2-\tilde{A}_t$ がともにマルチンゲールで $A,\tilde{A}\in\mathcal{A}_{+,c}$ とすると、$A_t-\tilde{A}_t=(M_t^2-\tilde{A}_t)-(M_t^2-A_t)\in\mathcal{M}_c^2\cap\mathcal{A}_c$ となるので補題 2.13 により $A_t-\tilde{A}_t=A_0-\tilde{A}_0=0, \forall t$ a.s. を得る。

(存在) まず、分割 Δ で $\|\Delta\|\to 0$ なるものをとるとき、$Q_t(M;\Delta)$ が L^2-ノルムで Cauchy 列をなすことを示す。$\Delta: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots$, $t_n<t\le t_{n+1}$ とし、$t_k<s\le t_{k+1}$ とすると、マルチンゲール性より $E[(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})^2|\mathcal{F}_s]=E[(M_{t_{k+1}}-M_s)^2|\mathcal{F}_s]+(M_s-M_{t_k})^2$ となるから

$$\begin{aligned}E[Q_t(M;\Delta)|\mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^{k}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(M_s-M_{t_k})^2\\ &\qquad +E[(M_{t_{k+1}}-M_{t_s})^2+\sum_{i=k+1}^{n-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(M_t-M_{t_n})^2|\mathcal{F}_s]\\ &= \sum_{i=0}^{k}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(M_s-M_{t_k})^2+E[M_t^2-M_s^2|\mathcal{F}_s].\end{aligned}$$

従って

$$E[Q_t(M;\Delta)-Q_s(M;\Delta)|\mathcal{F}_s]=E[M_t^2-M_s^2|\mathcal{F}_s] \tag{2.8}$$

となり、$M_t^2-Q_t(M;\Delta)$ がマルチゲールになることがわかる。Δ' を別な分割とすると $M_t^2-Q_t(M;\Delta')$ もマルチゲールだから $L_t:=Q_t(M;\Delta)-Q_t(M;\Delta')$ もマルチンゲールで 2 乗可積分である。よって、(2.8) で M を L, Δ を $\Delta\cup\Delta'$, $s=0$ ととることで

$$E[Q_t(Q(M;\Delta)-Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')]=E[L_t^2-L_0^2] \tag{2.9}$$

を得る。また

$$Q_t(Q(M;\Delta)-Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')\le 2Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta')+2Q_t(Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')$$

に注意する。ここで、$\Delta\cup\Delta': s_0<s_1<\cdots<s_l<s_{l+1}$, $s_l\le t<s_{l+1}$ とし、$t_{j(k)}\le s_k<s_{k+1}\le t_{j(k)+1}$ とすると

$$\begin{aligned}Q_{s_{k+1}}(M;\Delta)-Q_{s_k}(M;\Delta) &= (M_{s_{k+1}}-M_{t_{j(k)}})^2-(M_{s_k}-M_{t_{j(k)}})^2\\ &= (M_{s_{k+1}}-M_{s_k})(M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t_{j(k)}})\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta')=\sum_k(Q_{s_{k+1}}(M;\Delta)-Q_{s_k}(M;\Delta))^2+(Q_t(M;\Delta)-Q_{s_l}(M;\Delta))^2\\ &=\sum_k(M_{s_{k+1}}-M_{s_k})^2(M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t_{j(k)}})^2+(M_t-M_{s_l})^2(M_t+M_{s_l}-2M_{t_n})^2.\end{aligned}$$

従って

$$Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta')\le\sup_k|M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t_{j(k)}}|^2Q_t(M;\Delta\cup\Delta')$$

となり、(2.9) およびその次の式と合わせて

$$\begin{aligned}E[(Q_t(M;\Delta)-Q_t(M;\Delta'))^2] &\le 2E[Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta')]+2E[Q_t(Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')]\\ &\le 2E[\sup_k|M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t_{j(k)}}|^4]^{\frac{1}{2}}E[Q_t(M;\Delta\cup\Delta')^2]^{\frac{1}{2}}\\ &\qquad +2E[\sup_k|M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t'_{j(k)}}|^4]^{\frac{1}{2}}E[Q_t(M;\Delta\cup\Delta')^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

を得る。ここで、$\{t'_j\}$ は Δ' の分割点を表す。今、$\sup_k|M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t_{j(k)}}|^4\le 4^4(M_t^*)^4$ で Doob の不等式 (iii) より $M_t^*:=\sup_{0\le s\le t}|M_s|$ は 4 乗可積分であるから、Lebesgue の優収束定理により

$$\lim_{\|\Delta\|,\|\Delta'\|\to 0}E[\sup_k|M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t_{j(k)}}|^4]=\lim_{\|\Delta\|,\|\Delta'\|\to 0}E[\sup_k|M_{s_{k+1}}+M_{s_k}-2M_{t'_{j(k)}}|^4]=0$$

であり、補題 2.15 と合わせて

$$\lim_{\|\Delta\|,\|\Delta'\|\to 0} E[(Q_t(M;\Delta)-Q_t(M;\Delta'))^2]=0$$

となり、Cauchy 列となることがわかった。

各 $t>0$ に対して、分割の列 Δ_n を $\|\Delta_n\|\to 0, n\to\infty$ となるようにとる。$(Q_s(M;\Delta_n)-Q_s(M;\Delta_m))_{s\in[0,t]}$ はマルチンゲールなので Doob の不等式により、$n,m\to\infty$ のとき

$$E[\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M;\Delta_n)-Q_s(M;\Delta_m)|^2]\le 4E[|Q_t(M;\Delta_n)-Q_t(M;\Delta_m)|^2]\to 0$$

であり、$Q_s(M;\Delta_n)$ は連続なので、必要なら部分列 $\{\Delta_{n_k}\}$ をとることで補題 2.16 により $(\mathcal{F}_t)$-adapted な連続確率過程 $\langle M\rangle$ が存在して

$$P\Big(\lim_{k\to\infty}\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M;\Delta_{n_k})-\langle M\rangle_s|=0\Big)=1,\quad \lim_{k\to\infty}E\Big[\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M;\Delta_{n_k})-\langle M\rangle_s|^2\Big]=0$$

とできる。ここで、第 2 式については部分列を取る必要のないことは明らかであろう。これより、極限 $(\langle M\rangle_s)_{0\le s\le t}$ の一意性もわかる。特に、この極限は区間 $[0,t]$ の取り方によらず定まる。また、$s\mapsto Q_s(M;\Delta_n)$ は増加過程なので $s\mapsto\langle M\rangle_s$ も増加過程であることがわかり、$\langle M\rangle\in\mathcal{A}_{+,c}$ を得る。一方、$M_s^2-Q_s(M;\Delta_n)$ はマルチンゲールであるので $M_s^2-\langle M\rangle_s$ もマルチンゲールであることがわかる。 □

問 2.6 M をマルチンゲールとする。σ を *stopping time* とし、$M_t^\sigma=M_{\sigma\wedge t}$ とするとき、M^σ はマルチゲールであり、さらに $M\in\mathcal{M}_c^4$ とするとき、$\langle M^\sigma\rangle_t=\langle M\rangle_{\sigma\wedge t}$ を示せ。

定義 2.7 $(\mathcal{F}_t)$*-adapted* 右連続確率過程 $X=(X_t)$ に対して $\tau_n\le\tau_{n+1}, \forall n, \lim_{n\to\infty}\tau_n=\infty$ なる *(*$0\le t\le T$ で考えるときは $\lim_{n\to\infty}\tau_n=T$ なる*)* ある *stopping times* の列 $\{\tau_n\}$ があって、各 n に対して $(X_t^{\tau_n})$ がマルチンゲールになるとき $X=(X_t)$ は局所マルチンゲールであるという。局所マルチンゲール全体の空間を $\mathcal{M}_{\rm loc}$, 連続な局所マルチンゲール全体の空間を $\mathcal{M}_{c,{\rm loc}}$ と表す。

系 2.17 $M\in\mathcal{M}_{c,{\rm loc}}$ とするとき、

(1) $\langle M\rangle\in\mathcal{A}_{+,c}$ が存在して $M^2-\langle M\rangle$ は連続な局所マルチンゲールとなる。また、このような $\langle M\rangle$ は一意である。

(2) 各 $t>0$ に対して $[0,t]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとるとき

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0}P\Big(\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M;\Delta_n)-\langle M\rangle_s|>\varepsilon\Big)=0,\quad \varepsilon>0. \tag{2.10}$$

(3) $M_0=0$ のとき $M\in\mathcal{M}_c^2$ なることは $E[\langle M\rangle_t]<\infty, \forall t$ と同値であり、さらに $E[M_t^2]=E[\langle M\rangle_t]$ である。

証明: (1) 仮定よりある stopping time の列 $\{\tau_n\}$ があって M^{τ_n} はマルチンゲールとなる。$\sigma_n:=\inf\{t;|M_t|\ge n\}$ とし、$\rho_n=\sigma_n\wedge\tau_n$ とすると、$\rho_n\uparrow\infty$ であり、$M^n:=M^{\rho_n}$ は有界なマルチンゲールである。このとき定理 2.14 より $\exists A^n\in\mathcal{A}_{+,c}$ で $(M^n)^2-A^n$ はマルチンゲールとなるが $((M^{n+1})^2-A^{n+1})^{\rho_n}=(M^n)^2-(A^{n+1})^{\rho_n}$ はマルチンゲールであるから一意性により $(A^{n+1})^{\rho_n}=A^n$. 従って $\langle M\rangle_t:=\lim_{n\to\infty}A_t^n, \forall t>0$ が定義でき:

$$(M_t^{\rho_n})^2-\langle M\rangle_t^{\rho_n}=M_{\rho_n\wedge t}^2-\langle M\rangle_{\rho_n\wedge t}=(M_t^{\rho_n})^2-A_t^n$$

はマルチンゲールである。一意性は $A^1,A^2\in\mathcal{A}_{+,c}$ を $(M)^2-A^i\in\mathcal{M}_{c,{\rm loc}}$ $(i=1,2)$ と選べば、定理 2.14 より $(A^1)^{\rho_n}=(A^2)^{\rho_n}$ となることから従う。

(2) $\rho_n \uparrow \infty$ なので $\forall\delta > 0$ に対して $P(\rho_m \le t) < \delta$ となる m があり、M^{ρ_m} は有界マルチンゲールとなる。$Q_s(M;\Delta) = Q_s(M^{\rho_m};\Delta)$, $s \le \rho_m$ だから

$$\langle M\rangle_s = \langle M^{\rho_m}\rangle_s, \qquad s \le \rho_m.$$

よって

$$P\Big(\sup_{0\le s\le t} |Q_s(M;\Delta) - \langle M\rangle_s| > \varepsilon\Big) \le P(\rho_m \le t) + P\Big(\sup_{0\le s\le t} |Q_s(M^{\rho_m};\Delta) - \langle M^{\rho_m}\rangle_s| > \varepsilon\Big)$$

より

$$\limsup_{\|\Delta\|\to 0} P\Big(\sup_{0\le s\le t} |Q_s(M;\Delta) - \langle M\rangle_s| > \varepsilon\Big) \le \delta$$

となり $\delta \downarrow 0$ とすることで (2) が示される。

(3) $M \in \mathcal{M}_c^2$, $M_0 = 0$ とする。$E[(M_t^{\rho_n})^2 - \langle M^{\rho_n}\rangle_t] = 0$ だから

$$E[\langle M\rangle_t] = \lim_{n\to\infty} E[\langle M^{\rho_n}\rangle_t] = \lim_{n\to\infty} E[(M_t^{\rho_n})^2] \le E[M_t^2].$$

ここで最後の不等号は (M_t^2) の劣マルチンゲールによる。逆に Fatou の補題により

$$E[M_t^2] \le \liminf_{n\to\infty} E[(M_t^{\rho_n})^2] = \liminf_{n\to\infty} E[\langle M^{\rho_n}\rangle_t] = E[\langle M\rangle_t]$$

となり結論を得る。 □

系 2.18 $M, N \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ とする。このとき $\langle M, N\rangle \in \mathcal{A}_c$ が一意的に存在して

(1) $MN - \langle M, N\rangle$ は連続な局所マルチンゲール

(2) 各 $t > 0$ に対して $[0,t]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとるとき

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} P\Big(\sup_{0\le s\le t} |Q_s(M,N;\Delta_n) - \langle M,N\rangle_s| > \varepsilon\Big) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

である。ただし、$Q_s(M,N;\Delta_n) = \sum_{i:t_{i+1}<s}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) + (M_s - M_{t_n})(N_s - N_{t_n})$, $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$, $t_n \le s < t_{n+1}$ とする。

証明: $\langle M, N\rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle)$ ととればよい。一意性は系 2.17(1) と同様に補題 2.13 から示せる。 □

命題 2.19 $M, N, L \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ とする。

(i) $\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$.

(ii) $\langle M+N, L\rangle = \langle M, L\rangle + \langle N, L\rangle$.

(iii) 任意の定数 a に対して $\langle aM, N\rangle = a\langle M, N\rangle$.

(iv) τ を *stopping time* とするとき、$\langle M^\tau, N^\tau\rangle_t = \langle M^\tau, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_{\tau\wedge t}$.

証明: 系 2.17, 2.18 から明らか。 □

以下では、しばらく $\forall T > 0$ を固定して

$$\mathcal{M}_T := \{\, M = (M_t)_{t\in[0,T]}\,;\ M \text{ は連続な } (\mathcal{F}_t)\text{-マルチンゲールで } E[M_T^2] < \infty \,\}$$

とする。次の命題は確率積分を定義する際の基礎となる。

命題 2.20 $\mathcal{M}_T$ は $E[\langle\cdot,\cdot\rangle_T]$ を内積として実 *Hilbert* 空間をなす。

証明: $(\cdot,\cdot) := E[\langle\cdot,\cdot\rangle_T]$ が内積の性質を満たすこと[15]は系 2.17 と系 2.18, 命題 2.19 からわかる (演習問題とする)。完備であることは $\{M^n\}_n \subset \mathcal{M}_T$ が $E[\langle M^n - M^m\rangle_T] \to 0$ $(m,n\to\infty)$ とおくと、Doob の不等式 (iii) より

$$E\Big[\sup_{0\le s\le T}|M^n_s - M^m_s|^2\Big] \le 4E[|M^n_T - M^m_T|^2] = 4E[\langle M^n - M^m\rangle_T]$$

とできるから、補題 2.16 から $(\mathcal{F}_t)$-adapted な連続確率過程 M が存在して $E[\sup_{0\le s\le T}|M^n_s - M_s|^2] \to 0$, $n\to\infty$ となる (部分列をとる必要のないことに注意)。このとき、M がマルチンゲールであることは各 M^n がマルチンゲールであることと命題 2.1 (6) から従う。よって、

$$E[\langle M^n - M\rangle_T] = E[|M^n_T - M_T|^2]$$

であるから内積 $E[\langle\cdot,\cdot\rangle_T]$ から入るノルムが完備となり、$\mathcal{M}_T$ が Hilbert 空間であることがわかる。 □

3 確率積分

Brown 運動は命題 1.8 で見たように有界変動ではないから、積分 $\int_0^t f_s\,dB_s$ を通常の Stieltjes 積分として定義することはできない。ここでは、一般の連続な $(\mathcal{F}_s)$-マルチンゲール (M_s) に対して、f_s は時刻 s までの情報のみに依存している、即ち、$(\mathcal{F}_t)$-発展的可測 ($cf.$ 定義 1.2) であるとして、積分 $\int_0^t f_s\,dM_s$ が確率的に定義できることを示す。その際、前章のマルチンゲールに関する事柄が重要な役割を果たす。この章を通して、確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ が与えられているとする。

3.1 確率積分の定義

§2.5 で導入した記号を復習すると同時に以下の記号を導入する: $p\ge1, T>0$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^p_{c,T} &:= \{\, M=(M_t)_{t\in[0,T]} \text{ は連続マルチンゲールで } E[|M_T|^p]<\infty \,\},\\ \mathcal{M}^p_c &:= \{\, M=(M_t)_{t\ge0}\,;\, M \text{ は連続マルチンゲールで } E[|M_t|^p]<\infty,\ \forall t\ge0 \,\}\end{aligned}$$

$p=2$ のとき、単に $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}^2_{c,T}, \mathcal{M} = \mathcal{M}^2_c$ と書く。filtration $(\mathcal{F}_t)$ を強調したいときは $\mathcal{M}_T(\mathcal{F}_t), \mathcal{M}(\mathcal{F}_t)$ と書くこととする。

次の命題はすでに命題 2.20 として紹介したが、確率積分の定義する基礎の空間であるので (2) にを付け加え再度紹介する。

命題 3.1 *(1)* $\mathcal{M}_T$ は $\|M\|_T := E[M_T^2]^{1/2}$ をノルムとして *Hilbert* 空間をなす。
(2) $\mathcal{M}$ は $d(M,N) := \sum_{k=0}^{\infty}(\|M-N\|_k \wedge 1)/2^k$ を距離とする完備距離空間である。

証明: (1) は $\|M\|_T = E[\langle M\rangle_T]^{1/2}$ であるから命題 2.20 で証明済みである。(2) のために $\{M^n\} \subset \mathcal{M}$ を $d(M^n,M^m)\to0$ $(m,n\to\infty)$ とする。各 $T\in\mathbb{N}$ に対して $\{(M^n_t)_{t\in[0,T]}\}$ は $\mathcal{M}_T$ の Cauchy 列であるから、(1) より極限 $M^{(T)}\in\mathcal{M}_T$ を持つ。今、極限の一意性より $l\ge T$ ならば $M^{(T)}_t = M^{(l)}_t$ $(0\le t\le T)$ a.s. となる。よって、$M_t = M^{[t]+1}_t$ と定めれば、$M\in\mathcal{M}$ であり、$d(M^n,M)\to0$ $(n\to\infty)$ を得る。 □

系 2.17 によれば、$M\in\mathcal{M}$ に対して、ある $\langle M\rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ が存在して、$M^2 - \langle M\rangle$ はマルチンゲールとできる。そこで、$M\in\mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{L}^2_T(\langle M\rangle) := \{\, f\,;\, f=f_t(\omega) \text{ は発展的可測で } E[\int_0^T f_s^2\,d\langle M\rangle_s]<\infty \,\}$$

$$\mathcal{L}^2(\langle M\rangle) := \{\, f\,;\, f=f_t(\omega) \text{ は発展的可測で } E[\int_0^T f_s^2\,d\langle M\rangle_s]<\infty,\ \forall T>0 \,\}$$

[15] $M,N,L\in\mathcal{M}_T$, $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して、正値性: $(M,M)\ge0$, $(M,M)=0 \iff M=0$ a.s. と線形性: $(M+N,L) = (M,L)+(N,L)$, $(\alpha M,N)=\alpha(M,N)$, 対称性: $(M,N)=(N,M)$ を示せばよい。

とおく。また、特に $M \in \mathcal{M}$ が与えられたとき、単に $\|f\|_{L_T} := \Big(E[\int_0^T f_s^2\, d\langle M\rangle_s]\Big)^{1/2}, \mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(\langle M\rangle), \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ と書くこともある。

命題 3.2 $M \in \mathcal{M}$ が与えられたとする。
(1) $\mathcal{L}_T^2(\langle M\rangle)$ は $\|\cdot\|_{L_T}$ をノルムとして *Hilbert* 空間をなす。
(2) $\mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ は $\rho(f^1, f^2) := \sum_{k=1}^\infty (\|f^1 - f^2\|_{L_k^2} \wedge 1)/2^k$ を距離とする完備距離空間である。

証明: (1) $m(A) = E[\int_0^T 1_A(s,\omega)\, d\langle M\rangle_s],\ A \in \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_T$ (直積 σ-加法族) とおく。$L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_T, dm)$ は通常の L^2 空間の議論から完備とわかる。したがって、$\mathcal{L}_T^2(\langle M\rangle)$ はその閉部分空間 (極限も発展的可測であることを示せばよい) であるから、完備性は従う。(2) は命題 3.1 の (2) と同様に示せるので演習問題とする。 $\square$

$f_t(\omega) = \sum_{j=1}^k \xi_{j-1}(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t);\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k,\ k \in \mathbb{N}$ で各 ξ_j は有界な $\mathcal{F}_{t_j}$-可測関数、と表わされる f を階段過程といい、階段過程全体を $\mathcal{L}_0$ と書くこととする。

補題 3.3 $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ で稠密である。

証明: $f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ をとる。Lebesgue の優収束定理より f は有界として一般性を失わない。

$$\tilde{f}_s(\omega) = \limsup_{n\to\infty} f_s^n(\omega), \quad f_s^n(\omega) := \frac{\int_{(s-\frac{1}{n})\vee 0}^s f_u(\omega)\, d\langle M\rangle_u}{\langle M\rangle_s - \langle M\rangle_{(s-\frac{1}{n})\vee 0}}$$

とする。f_s は発展的可測であるから f_s^n は $\mathcal{F}_s$-可測であることに注意する。このとき、分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ に対して

$$f_s^{n,\Delta}(\omega) = \sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}^n(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(s)$$

とおけば、$f^{n,\Delta} \in \mathcal{L}_0$ であり、f^n は連続であるから $\lim_{\|\Delta\|\to 0} f_s^{n,\Delta}(\omega) = f_s^n(\omega), \forall (s,\omega)$. 従って、

$$E[\int_0^T |f_s^{n,\Delta} - f_s^n|^2\, d\langle M\rangle_s] \to 0, \quad \|\Delta\| \to 0.$$

一方、$d\langle M\rangle$ a.a. s に対して、$\lim_{n\to\infty} f_s^n(\omega)$ が存在して $\tilde{f}_s(\omega)$ に等しく、

$$\int_0^T \tilde{f}_s(\omega)\, d\langle M\rangle_s = \int_0^T f_s(\omega)\, d\langle M\rangle_s$$

である[16]。従って、$E[\int_0^T |f_s^n - \tilde{f}_s|^2 d\langle M\rangle_s] \to 0$ と合わせて、$f^{n,\Delta}$ が f を近似していることがわかった。 $\square$

定義 3.1 $f_s(\omega) = \sum_{j=1}^k \xi_{j-1}(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(s) \in \mathcal{L}_0$ に対して

$$I(f)_t := \sum_{j: t_j < t} \xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) + \xi_l(M_t - M_{t_l}), \quad t_l < t \le t_{l+1} \tag{3.1}$$

と定義する。また、これを

$$I(f)_t = \int_0^t f_s\, dM_s$$

と表す。*(3.1)* で分点の取り方によらないことに注意する。また、ξ_j は $\mathcal{F}_{t_j}$-可測であった。

補題 3.4 $I(f) \in \mathcal{M}$ であり、*(1)* $\langle I(f)\rangle_t = \int_0^t f_s^2\, d\langle M\rangle_s$. *(2)* $E[I(f)_t^2] = E[\int_0^t f_s^2\, d\langle M\rangle_s]$.

[16] [I] 伊藤清三: ルベーグ積分入門 裳華房 p.139 定理 19.3 のように証明できる。

証明: $I(f)$ のマルチンゲール性: $f_t = \xi_1(\omega)1_{(t_1,t_2]}(t)$, ξ_1 は $\mathcal{F}_{t_1}$-可測, のときに証明すれば十分であろう。このとき、

$s \geq t_1$ であれば $E[I(f)_t|\mathcal{F}_s] = \xi_1(E[M_{t\wedge t_2}|\mathcal{F}_s] - M_{t_1}) = \xi_1(M_s - M_{t_1}) = I(f)_s$.

$s < t_1$ であれば $E[I(f)_t|\mathcal{F}_s] = E[\xi_1(E[M_{t\wedge t_2}|\mathcal{F}_{t_1}] - M_{t_1})|\mathcal{F}_s] = 0$, $I(f)_s = 0$ より従う。連続性と 2 乗可積分性は (ξ_j は有界だから) は明らかである。

(1): $s \leq t_j < t_k$ のとき

$$E[\xi_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\xi_k(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})|\mathcal{F}_s] = E[\xi_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\xi_k E[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]|\mathcal{F}_s] = 0$$

であることに注意する。これより、$t_m \leq s < t_{m+1} \leq t_l \leq t < t_{l+1}$ とすると、

$$\begin{aligned}
&E[(I(f)_t - I(f)_s)^2|\mathcal{F}_s] \\
&= E[\Big\{\sum_{j=m+2}^{l} \xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) + \xi_l(M_t - M_{t_l}) + \xi_m(M_{t_{m+1}} - M_s)\Big\}^2|\mathcal{F}_s] \\
&= E[\xi_m^2(M_{t_{m+1}} - M_s)^2|\mathcal{F}_s] + \sum_{j=m+2}^{l} E[\xi_{j-1}^2(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(M_t - M_{t_l})^2|\mathcal{F}_s] \\
&= E[\xi_m^2(M_{t_{m+1}}^2 - M_s^2)|\mathcal{F}_s] + \sum_{j=m+2}^{l} E[\xi_{j-1}^2(M_{t_j}^2 - M_{t_{j-1}}^2)|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(M_t^2 - M_{t_l}^2)|\mathcal{F}_s] \\
&= E[\xi_m^2(\langle M\rangle_{t_{m+1}} - \langle M\rangle_s)|\mathcal{F}_s] + \sum_{j=m+2}^{l} E[\xi_{j-1}^2(\langle M\rangle_{t_j} - \langle M\rangle_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_l})|\mathcal{F}_s] \\
&= E[\int_s^t f_u^2 \langle M\rangle_u|\mathcal{F}_s].
\end{aligned}$$

一方、$I(f)$ のマルチンゲール性より $E[\{I(f)_t - I(f)_s\}^2|\mathcal{F}_s] = E[I(f)_t^2 - I(f)_s^2|\mathcal{F}_s]$ である。よって、$I(f)_t^2 - \int_0^t f_u^2\langle M\rangle_u$ はマルチンゲールとなり、(1) の主張は示された。(2) は (1) で $s = 0$ ととればよい。
□

定義 3.2 $f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ に対して確率積分を定義する。$f^n \in \mathcal{L}_0$ を

$$\lim_{n\to\infty} E[\int_0^T |f_s^n - f_s|^2\, d\langle M\rangle_s] = 0, \quad \forall T > 0$$

となるようにとると、$\mathcal{L}_0$ 上で $I(f)$ が線形であることと補題 *3.4 (2)* により $\{I(f^n)\}_n$ は $\mathcal{M}$ の *Cauchy* 列となる。よって、命題 *3.1* により $X \in \mathcal{M}$ が存在して $d(I(f^n), X) \to 0$ *(*$n \to \infty$*)* とできる。この X を $X_t = I(f)_t = \int_0^t f_s\, dM_s$ と書き、f の M による**確率積分** *(stochastic integral)* と呼ぶ。

問 3.1 定義 *3.2* で、$I(f)$ が f への収束列 $\{f^n\}$ の取り方によらないことを示せ。

問 3.2 $f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ とするとき、$E[I(f)_T^2] = E[\langle I(f)\rangle_T] = E[\int_0^T f_s^2\, d\langle M\rangle_s]$ を示せ。
ヒント*:* $\mathcal{L}_0$ の元で近似せよ。

補題 3.5 $M, N \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle), g \in \mathcal{L}^2(\langle N\rangle)$, $t > 0$ とすると、

$$\Big|\int_0^t f_s g_s\, d\langle M, N\rangle_s\Big| \leq \Big(\int_0^t f_s^2\, d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t g_s^2\, d\langle N\rangle_s\Big)^{1/2}, \quad a.s. \tag{3.2}$$

証明: 命題 2.19 により、$\langle M + rN\rangle = \langle M\rangle + 2r\langle M, N\rangle + r^2\langle N\rangle, \forall r \in \mathbb{Q}$ であるから、

$$0 \leq \int_{s_1}^{s_2} d\langle M + rN\rangle_s = \int_{s_1}^{s_2} d\langle M\rangle_s + 2r\int_{s_1}^{s_2} d\langle M, N\rangle_s + r^2\int_{s_1}^{s_2} d\langle N\rangle_s, \quad a.s.$$

であるが、右辺は r について連続だから、$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して成立するので、

$$\Big|\int_{s_1}^{s_2} d\langle M,N\rangle_s\Big| \le \Big(\int_{s_1}^{s_2} d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_{s_1}^{s_2} d\langle N\rangle_s\Big)^{1/2}.$$

よって、$f = \sum_i \xi_{i-1} 1_{(t_{i-1},t_i]}, g = \sum_i \eta_{i-1} 1_{(t_{i-1},t_i]} \in \mathcal{L}_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^t f_s g_s d\langle M,N\rangle_s\Big| &= \Big|\sum_i \xi_{i-1}\eta_{i-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle M,N\rangle_s\Big| \\
&\le \sum_i |\xi_{i-1}||\eta_{i-1}|\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle N\rangle_s\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(\sum_i |\xi_{i-1}|^2\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\sum_i |\eta_{i-1}|^2\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle N\rangle_s\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_0^t f_s^2 d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t g_s^2 d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2} \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

よって、有界な f,g に対しては補題 3.3 により $\mathcal{L}_0$ の元で近似し、一般の f,g に対しては Lebesgue の優収束定理を用いて有界なもので近似すればよい。 □

定理 3.6 *(1)* $M,N \in \mathcal{M},\ f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ のとき、$I(f)_t = \displaystyle\int_0^t f_s\, dM_s$ とすると、

$$\langle I(f),N\rangle_t = \int_0^t f_s\, d\langle M,N\rangle_s, \quad t>0 \tag{3.3}$$

である。逆に $\forall N \in \mathcal{M}$ に対して $\langle X,N\rangle_t = \displaystyle\int_0^t f_s\, d\langle M,N\rangle_s$ *(*$t>0$*)* および $X_0 = 0$ を満たす $\mathcal{M}$ の元 X は $I(f)_t = \displaystyle\int_0^t f_s\, dM_s$ に限る。

(2) $I(f)_T = \displaystyle\int_0^T f_s\, dM_s$ によって定まる、$I : \mathcal{L}_T^2(\langle M\rangle) \to \mathcal{M}_T$ は各 $T>0$ に対し等距離写像である。

証明: (1) $f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ に対し、$\{f^n\}_n \in \mathcal{L}_0$ を $\|f - f^n\|_{L_T} \to 0\ (n\to\infty), \forall T>0$ とすると、定義 3.2 より

$$E[\langle I(f^n) - I(f)\rangle_T] = E[\int_0^T |f_s^n - f_s|^2\, d\langle M\rangle_s] \to 0, \quad n\to\infty.$$

補題 3.5 より

$$\begin{aligned}
&E[|\langle I(f^n),N\rangle_T - \langle I(f),N\rangle_T|] = E[|\langle I(f^n) - I(f),N\rangle_T|] \\
&\le E[\langle I(f^n)-I(f)\rangle_T^{1/2}\langle N\rangle_T^{1/2}] \le E[\langle I(f^n)-I(f)\rangle_T]^{1/2} E[\langle N\rangle_T]^{1/2} \to 0
\end{aligned}$$

同じく補題 3.5 より、$\Big|\displaystyle\int_0^T (f_s - f_s^n)\, d\langle M,N\rangle_s\Big| \le \Big(\displaystyle\int_0^T |f_s - f_s^n|^2\, d\langle M\rangle_s\Big)^{1/2}\langle N\rangle_T^{1/2}$ であるから、

$$E[\Big|\int_0^T f_s\, d\langle M,N\rangle_s - \int_0^T f_s^n\, d\langle M,N\rangle_s\Big|] \to 0, \quad n\to\infty.$$

一方、補題 3.4(1) と同様に $\langle I(f^n),N\rangle_t = \displaystyle\int_0^t f_s^n\, d\langle M,N\rangle_s$ を示せるから、(3.3) が従う。

一意性を示すために、$\tilde{X} \in \mathcal{M}$ も $\langle \tilde{X},N\rangle_t = \displaystyle\int_0^t f_s\, d\langle M,N\rangle_s$ を満たすとする。このとき、$\forall N \in \mathcal{M}$ に対して $\langle \tilde{X} - X, N\rangle = 0$ であるが、特に $N = \tilde{X} - X$ とすると、$\langle \tilde{X} - X\rangle = 0$. これは、$\tilde{X} = X$ a.s. を意味する。(2) は問 3.2 そのものである。 □

系 3.7 *(1)* $M \in \mathcal{M},\ f,g \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle),\ a,b \in \mathbb{R}$ のとき

$$\int_0^t (af_s + bg_s)\, dM_s = a\int_0^t f_s\, dM_s + b\int_0^t g_s\, dM_s, \quad \forall t > 0.$$

(2) $M, N \in \mathcal{M},\ f \in \mathcal{L}^2(\langle M\rangle) \cap \mathcal{L}^2(\langle N\rangle),\ a,b \in \mathbb{R}$ のとき

$$\int_0^t f_s\, d(aM + bN)_s = a\int_0^t f_s\, dM_s + b\int_0^t f_s\, dN_s, \quad \forall t > 0.$$

証明: (1) $N \in \mathcal{M}$ のとき、定理 3.6 と命題 2.19 より

$$\begin{aligned}&\langle \int_0^{\cdot} (af_s + bg_s)\, dM, N\rangle_t = \int_0^t (af_s + bg_s)\, d\langle M,N\rangle_s = a\int_0^t f_s\, d\langle M,N\rangle_s + b\int_0^t g_s\, d\langle M,N\rangle_s \\ &= \langle a\int_0^{\cdot} f_s\, dM_s, N\rangle_t + \langle b\int_0^{\cdot} g_s\, dM_s, N\rangle_t = \langle a\int_0^{\cdot} f_s\, dM_s + b\int_0^{\cdot} g_s\, dM_s, N\rangle_t.\end{aligned}$$

となり、定理 3.6 の一意性を用いることで主張を得る。
(2) 補題 3.5 より $\mathcal{L}^2(\langle M\rangle) \cap \mathcal{L}^2(\langle N\rangle) \subset \mathcal{L}^2(\langle aM + bN\rangle)$ であるから主張の左辺の積分は定義されることに注意する。定理 3.6 と命題 2.19 より、$\forall L \in \mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle \int_0^{\cdot} f_s\, d(aM + bN)_s, L\rangle_t = \int_0^t f_s\, d\langle aM + bN, L\rangle_s \\ &= a\int_0^t f_s\, d\langle M,L\rangle_s + b\int_0^t f_s\, d\langle N,L\rangle_s = \langle a\int_0^{\cdot} f_s\, dM_s + b\int_0^{\cdot} f_s\, dN_s, L\rangle_t. \qquad \square\end{aligned}$$

定義 3.3 (局所マルチンゲールに対する確率積分) 局所マルチンゲール $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ をとる *(cf. 定義 2.7)*。この M に対して

$$P\Big(\int_0^T f_s^2\, d\langle M\rangle_s < \infty\Big) = 1, \quad \forall T > 0 \tag{3.4}$$

となる発展的可測な $f = (f_s)$ に対して確率積分 $\int_0^t f_s\, dM_s$ を定義する。
定義 *2.7* より *stopping time* の列 $\{\sigma_n\}$ が存在して $\sigma_n \uparrow \infty$ かつ $M_{t\wedge\sigma_n}$ がマルチンゲールとできる。

$$\tau_n = n \wedge \inf\{\, t \geq 0\,;\ \int_0^t f_s^2\, d\,\langle M\rangle_s \geq n\,\}$$

とおくとき、$\tau_n \uparrow \infty$ であり、$\rho_n = \sigma_n \wedge \tau_n$ とし、$M_t^n = M_{t\wedge\rho_n},\ f_t^n(\omega) = f_t(\omega)1_{\{\rho_n \geq t\}}(\omega)$ とおけば、$M^n \in \mathcal{M},\ f^n \in \mathcal{L}^2(\langle M^n\rangle)$ であるので、$I(f^n)_t = \int_0^t f_s^n\, dM_s^n$ は定義できる。また、定理 *3.6* と命題 *2.19 (iv)* により

$$I(f^n)_t = I(f^m)_t, \quad 0 \leq t \leq \rho_n,\ n \leq m$$

となる。また、$\rho_n \uparrow \infty$ *(*$n \to \infty$*)* であるから、整合的に $I(f)_t = I(f^n)_t,\ 0 \leq t \leq \rho_n$ と定義できる。この $I(f)$ を f の M による確率積分と呼ぶ。

問 3.3 *(定理 3.6 の拡張)* $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ と *(3.4)* を満たす発展的可測な $f = (f_s)$ に対して、$I(f)_t = \int_0^t f_s\, dM_s \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ は *(3.3)* を満たす唯一つの元であることを示せ。

問 3.4 $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$, *(3.4)* を満たす左連続で $(\mathcal{F}_t)$-適合な $f = (f_s)$ と分割 $\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ に対して

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} P\Big(\Big|\int_0^t f_s dM_s - \sum_i f(s_i)(M_{s_{i+1}} - M_{s_i})\Big| > \delta\Big) = 0, \quad \delta > 0$$

が成立することを示せ。

3.2 伊藤の公式

ここでは確率積分によって定義されるような確率過程に対し、合成関数の微分公式 (連鎖律[17]) に相当する公式である**伊藤の公式**を証明し**確率演算** (stochastic calculus) の基礎付けを行う。

定義 3.4 確率過程 $X=(X_t)$ が

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}},\ A \in \mathcal{A}_c$$

で X_0 は $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数、ただし $M_0=0$ *a.s.* $A_0=0$ *a.s.*, と表されるとき、$X=(X_t)$ は連続な**セミマルチンゲール** *(semi-martingale)*[18]という。また、d 次元確率過程が連続なセミマルチンゲールであるとは、各成分が連続なセミマルチンゲールであるときにいう。

定理 3.8 $X_t=(X_t^1,\ldots,X_t^d)$ を連続なセミマルチンゲールであるとする*:*

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i, \quad i=1,\cdots,d. \tag{3.5}$$

このとき、$f\in C^2(\mathbf{R}^d)$ に対して $f(X_t)$ は連続なセミマルチンゲールで

$$\begin{aligned} f(X_t)-f(X_0) \ =\ & \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\,dM_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\,dA_s^i \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s)\,d\left\langle M^i, M^j\right\rangle_s . \end{aligned} \tag{3.6}$$

証明: 記号の単純化のために $f_i' := \frac{\partial f}{\partial x^i}, f_{ij}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ などと書く。

$$\tau_n := \inf\{\, t>0\,;\, |X_0|\vee|M_t|\vee|A_t|>n\,\}$$

とする。ただし $\inf\emptyset=\infty$ と定める。このとき、$\tau_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$ であるから $X_{t\wedge\tau_n}$ について (3.6) を示せばよい。したがって、X_0, M_t, A_t はすべて有界で f, f_i', f_{ij}'' はすべて有界かつ一様連続としてよい: $|f|+\sum_i|f_t'|+\sum_{ij}|f_{ij}''|\le K$. $[0,t]$ の分割 $\Delta: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ をとる。このとき、Taylor の公式により $\xi_k = X_{t_{k-1}} + \theta_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})$, $\theta_k\in(0,1)$ が存在して

$$\begin{aligned} f(X_t)-f(X_0) &= \sum_{k=1}^n (f(X_{t_k})-f(X_{t_{k-1}})) \\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^d f_i'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(\xi_k)(X_{t_k}^i-X_{t_{k-1}}^i)(X_{t_k}^j-X_{t_{k-1}}^j). \end{aligned}$$

右辺第一項は $\|\Delta\|\to 0$ としたとき、確率積分の定義より

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\,dM_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\,dA_s^i$$

に確率収束する (定義 3.2 と補題 2.16 を参照のこと)。第二項は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(\xi_k)(M_{t_k}^i-M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j-M_{t_{k-1}}^j) + \sum_{k=1}^n\sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(\xi_k)(M_{t_k}^i-M_{t_{k-1}}^i)(A_{t_k}^j-A_{t_{k-1}}^j) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(\xi_k)(A_{t_k}^i-A_{t_{k-1}}^i)(A_{t_k}^j-A_{t_{k-1}}^j) \equiv I_1+I_2+I_3 \end{aligned}$$

[17] $x=(x_t)$ が微分可能なら $f\in C^1(\mathbf{R})$ に対し、$\frac{d}{dt}f(x_t)=f'(x_t)\dot{x}_t$ あるいは積分して $f(x_t)-f(x_0)=\int_0^t f'(x_s)\dot{x}_s\,ds = \int_0^t f'(x_s)\,dx_s$.

[18] 一般にセミマルチンゲールは右連続性だけを仮定するのであるが、この授業では連続な場合しか考えない。以降 "連続" を略すこともある。

となるが、ここで、$A^i = A^{i,+} - A^{i,-}$, $A^{i,+}, A^{i,-} \in \mathcal{A}_{+,c}$ と表すとき、

$$|I_2| \le K \sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|(|A_t^+| + |A_t^-|) \to 0, \quad \|\Delta\| \to 0, \text{ a.s.}$$
$$|I_3| \le K \sup_k |A_{t_k} - A_{t_{k-1}}|(|A_t^+| + |A_t^-|) \to 0, \quad \|\Delta\| \to 0, \text{ a.s.}$$

となる。ただし、$M_t = (M_t^1, \dots, M_t^d)$, $A_t^+ = (A_t^{1,+}, \dots, A_t^{d,+}), A_t^- = (A_t^{1,-}, \dots, A_t^{d,-})$ と書いた。I_1 が (3.6) の右辺第三項に収束することを示すために

$$I_1' := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j)$$

とおく。このとき、定理 2.14 の前で定義した $Q_t(M,\Delta)$ を用いると、

$$\begin{aligned}|I_1 - I_1'| &\le \frac{1}{2}\sum_k \sum_{i,j} \sup_l |f_{ij}''(\xi_l) - f_{ij}''(X_{t_{l-1}})||M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i||M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j| \\ &\le \frac{1}{2}\sup_{i,j,l}|f_{ij}''(\xi_l) - f_{ij}''(X_{t_{l-1}})|\sum_{m,n} Q_t(M^m;\Delta)^{1/2} Q_t(M^n;\Delta)^{1/2}\end{aligned}$$

となるから、Schwarz の不等式を 2 回用いることにより、

$$\begin{aligned}&E[|I_1 - I_1'|] \le \frac{1}{2}\sum_{m,n} E\big[\sup_{i,j,l}|f_{ij}''(\xi_l) - f_{ij}''(X_{t_{l-1}})|Q_t(M^m;\Delta)^{1/2}Q_t(M^n;\Delta)^{1/2}\big] \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{m,n} E\big[\sup_{i,j,l}|f_{ij}''(\xi_l) - f_{ij}''(X_{t_{l-1}})|^2\big]^{1/2} E\big[Q_t(M^m;\Delta)Q_t(M^n;\Delta)\big]^{1/2} \\ &\le \frac{1}{2}E\big[\sup_{i,j,l}|f_{ij}''(\xi_l) - f_{ij}''(X_{t_{l-1}})|^2\big]^{1/2}\sum_{m,n} E\big[Q_t(M^m;\Delta)^2\big]^{1/4} E\big[Q_t(M^n;\Delta)^2\big]^{1/4}\end{aligned}$$

であるが、補題 2.15 により $\|\Delta\| \to 0$ のとき右辺 $\to 0$ となる。更に

$$I_1'' := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(X_{t_{k-1}})(\langle M^i, M^j\rangle_{t_k} - \langle M^i, M^j\rangle_{t_{k-1}})$$

とする。$E[(M_{s_2}^i - M_{s_1}^i)(M_{s_2}^j - M_{s_1}^j) - (\langle M^i, M^j\rangle_{s_2} - \langle M^i, M^j\rangle_{s_1})|\mathcal{F}_{s_1}] = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}&E[|I_1' - I_1''|^2] = \frac{1}{4}\sum_k E\Big[\Big(\sum_{i,j} f_{ij}''(X_{t_{l-1}})\{(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\langle M^i, M^j\rangle_s\}\Big)^2\Big] \\ &\le \sum_k K^2 E\big[|M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^4 + \sum_{i,j}(\langle M^i, M^j\rangle_{t_k} - \langle M^i, M^j\rangle_{t_{k-1}})^2\big] \\ &\le K^2 E\big[\sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^2 \sum_i Q_t(M^i;\Delta)\big] \\ &\quad + K^2 \sum_{i,j} E\big[\sup_k |\langle M^i, M^j\rangle_{t_k} - \langle M^i, M^j\rangle_{t_{k-1}}|(\langle M^i, M^j\rangle_t^+ + \langle M^i, M^j\rangle_t^-)\big]\end{aligned}$$

より $E[|I_1' - I_1''|^2] \to 0$ $(\|\Delta\| \to 0)$. 一方、$I_2'' \to \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t f_{ij}''(X_s)\, d\left\langle M^i, M^j\right\rangle_s$ であるから

$$I_1 - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t f_{ij}''(X_s)\, d\left\langle M^i, M^j\right\rangle_s \to 0 \ \text{ in } L^1, \text{ as } \|\Delta\| \to 0.$$

従って、(3.6) は各 t に対して a.s. に等しいが両辺は t について連続なので確率 1 ですべての t に対して (3.6) が成立する。 $\square$

注意 3.1 発展的可測な関数 $\varphi_s(\omega)$ のセミマルチンゲール $X_s = X_0 + M_s + A_s$ による積分を

$$\int_0^t \varphi_s \, dX_s = \int_0^t \varphi_s \, dM_s + \int_0^t \varphi_s \, dA_s$$

で定義する[19]。この記号を用い、更に第 *0* 座標を $X_s^0 = s$ と導入することで、*(3.6)* は

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) \;&=\; \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X_s)\, dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(s, X_s)\, d\left\langle M^i, M^j \right\rangle_s . \end{aligned} \tag{3.7}$$

と書き換えられる。実は、$f(t,x)$ は t について C^1 級で x について C^2 級であれば *(3.7)* は成立する。[20]

定義 3.5 *Brown* 運動 $B = (B_t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-**Brown 運動**であるとは

(i) $B = (B_t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合で、

(ii) $0 \le \forall s \le t$ に対し $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s$ は独立

になるときにいう。定義 *1.4* で定義した *Brown* 運動は $\mathcal{F}_s^{0,B}$-*Brown* 運動とも言える。

問 3.5 伊藤の公式を用いて $B_t^p = p\int_0^t B_s^{p-1}\, dB_s + \dfrac{p(p-1)}{2}\int_0^t B_s^{2p-2}\, ds$ を示し、それから $E[B_t^{2p}]$, $p \in \mathbb{N}$ を求めよ。*(*ヒント*: Brown* 運動 (B_t) の二次変分は $\langle B \rangle_t = t$ であった。*)*

例 3.1 $f(t,x) = e^{x - \frac{1}{2}t}$ とおくと、

$$e^{B_t - \frac{1}{2}t} - 1 = \int_0^t e^{B_s - \frac{1}{2}s}\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s - \frac{1}{2}s}\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s - \frac{1}{2}s}\, ds = \int_0^t e^{B_s - \frac{1}{2}s}\, dB_s$$

となり、さらに $E[e^{2B_t - t}] = e^t$ となるから、$(e^{B_t - \frac{1}{2}t})$ は *2* 乗可積分なマルチンゲールとなる。

例 3.2 *(***Lévy の定理***)* $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d) \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ が $\left\langle X^i, X^j \right\rangle_t = \delta_{ij} t$ を満たすならば、$X = (X_t)$ は d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-*Brown* 運動である。

証明: $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbf{R}^d$ を任意にとり、$f(t,x) = f(t, x_1, \ldots, x_d) = e^{i\xi\cdot x + \frac{|\xi|^2}{2}t}$ とおく。このとき、$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ となるから、伊藤の公式により、$s < t$ のとき

$$f(t, X_t) - f(s, X_s) = \sum_{k=1}^d \int_s^t i\xi_k e^{i\xi\cdot X_u + \frac{|\xi|^2}{2}u} dX_k$$

となること、および、仮定より $X \in \mathcal{M}_c^2$ となるので、$E[e^{i\xi\cdot X_t + \frac{|\xi|^2}{2}t} | \mathcal{F}_s] = e^{i\xi\cdot X_s + \frac{|\xi|^2}{2}s}$, 即ち、$E[e^{i\xi\cdot(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}$. これは X が $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動であることを示している。 □

例 3.3 B_t を x から出発する N 次元 *Brown* 運動とする。$f(x) = |x|^m = ((x^1)^2 + \cdots + (x^N)^2)^{m/2}$, $m \ge 2$ とすれば伊藤の公式より

$$|B_t|^m - |x|^m = m\sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i |B_s|^{m-2}\, dB_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t (Nm + m(m-2))|B_s|^{m-2}\, ds$$

[19]厳密には、右辺は各 $T > 0$ に対して $\int_0^T |\varphi(s)|^2\, d\langle M \rangle_s + \int_0^T |\varphi(s)|\, d|A|_s < \infty$ a.s. という場合にのみ定義される。

[20]実際、定理 3.8 の証明を見直せば $M_t^i \equiv 0$ となる座標においては C^1 級であり、そのほかの座標について C^2 級であれば (3.6) は成立する。

を得る。ここで、$N\ge 3$ で、$m=2-N$, $\sigma_n := \inf\{\,t\,;\,|B_t|\le 1/n\,\}$ とするとき、

$$|B_{t\wedge\sigma_n}|^m - |x|^m = m\sum_{i=1}^N \int_0^{t\wedge\sigma_n} B_s^i |B_s|^{m-2}\,dB_s^i$$

であるが、$x\ne 0$ とするとき、実は $\sigma_n \uparrow \infty$ *($n\to\infty$)* であるので、$|B_t|^m$ は局所マルチンゲールである。特に、$N=3, m=-1$ のときを *3* 次の **Bessel 過程**という *(cf. 例 4.1)*。

3.3 マルチンゲールの表現定理

Brown 運動による確率積分はマルチンゲールになる。ここでは逆に Brown 運動 $B=(B_s)$ から定まる filtration $(\mathcal{F}_t^B)$ についてのマルチンゲールであれば、それは Brown 運動による確率積分を用いて表現できることを示す。ただし、$\mathcal{F}_t^B = \sigma\{\,B_s\,;\,0\le s\le t\,\}\vee\mathcal{N}$ であった (*cf.* 問題 2.2)。[21]

定理 3.9 $Y\in L^2 := L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ が $\mathcal{F}_T^B$ 可測ならば、$f\in\mathcal{L}_T^2 := \mathcal{L}_T^2(\langle B\rangle)$ が存在して

$$Y = E[Y] + \int_0^T f_s\,dB_s \tag{3.8}$$

と表すことができる。

証明: 第 1 段: $Y=e^{i\xi(B_t-B_r)}$, $0\le r<t\le T$, $\xi\in\mathbf{R}$ に対し表現 (3.8) の存在を示す。$\varphi(t,x)=e^{i\xi x+\xi^2t/2}$ に対して伊藤の公式を用いると

$$e^{i\xi B_t+\frac{\xi^2}{2}t} - e^{i\xi B_r+\frac{\xi^2}{2}r} = \int_r^t i\xi e^{i\xi B_s+\frac{\xi^2}{2}s}\,dB_s.$$

したがって、

$$e^{i\xi(B_t-B_r)} = e^{-\frac{\xi^2}{2}(t-r)} + \int_0^T 1_{(r,t]}(s) i\xi e^{i\xi(B_s-B_r)+\frac{\xi^2}{2}(s-r)}\,dB_s$$

となり (3.8) を得た。

第 2 段: (3.8) の表現が積について閉じていることを示す。Y^k, $k=1,2$, がともに有界で表現 (3.8) をもち、それぞれ $Y^k=E[Y^k]+\int_0^T f_s^k\,dB_s$ と書けており、もし $\int_0^T f_s^1 f_s^2\,ds=0$ であれば、$Y=Y_1Y_2$ は (3.8) の表現を持つことを示す。これは、$Y_t^k = E[Y^k]+\int_0^t f_s^k\,dB_s$ に対し伊藤の公式を用いると

$$Y = Y_T^1Y_T^2 = Y_0^1Y_0^2 + \int_0^T (f_s^1Y_s^2 + Y_s^1 f_s^2)\,dB_s + \int_0^T f_s^1 f_s^2\,ds \tag{3.9}$$

となる。これより、$\int_0^T f_s^1 f_s^2\,ds = 0$ であるから、$Y=Y_1Y_2$ は (3.8) の表現を持つことが示された。この操作を $n-1$ 回繰り返せば、n 個の積 $Y=Y^1Y^2\cdots Y^n$ についても同様に、もし各 Y^k が表現 (3.8) をもち、$f_s^k f_s^l = 0$ $(k\ne l)$ であれば、(3.8) の表現を持つことがわかる。

第 3 段: 表現 (3.8) が極限操作について閉じていることを示す。Y^n, $n\in\mathbf{N}$, が f_s^n により表現 (3.8) をもち、$Y^n\to Y$ in L^2, $n\to\infty$, であると仮定する。このとき、$E[Y^n]\to E[Y]$ $(n\to\infty)$ であり、

$$E[\int_0^T (f_s^m - f_s^n)^2\,ds] = E[\Big(\int_0^T f_s^m\,dB_s - \int_0^T f_s^n\,dB_s\Big)^2] = E[\{(Y^m-Y^n)-(E[Y^m]-E[Y^n])\}^2]$$

となるから、$\{f_s^n\}_n$ は $\mathcal{L}_T^2$ のノルムに関して Cauchy 列であり、命題 3.2 によりその極限 $f_s\in\mathcal{L}_T^2$ が定まる。特に、Y がこの f_s により表現 (3.8) をもつことは容易にわかる。

第 4 段: $Y=Y_1\cdots Y_m$, $0\le r_0\le\cdots\le r_m\le T$, $\xi_1,\ldots\xi_m\in\mathbf{R}$, $m\in\mathbf{N}$ の形の確率変数を考える。ここで、$Y^k = e^{i\xi_k(B_{r_k}-B_{r_{k-1}})}$ で、第 1 段よりこれは $f_s^k = 1_{(r_{k-1},r_k]}(s) i\xi_k e^{i\xi_k(B_s-B_{r_{k-1}})+\frac{\xi_k^2}{2}(s-r_{k-1})}$ として表現 (3.8) をもつ。さらに、これは $f_s^k f_s^l = 0$ $(k\ne l)$ を満たすから、第 2 段より Y は表現 (3.8) をもつことがわかる。ところが、このような形の Y およびその線形一次結合の全体は $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$ で稠密であるから、第 3 段より任意の $Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$ について表現 (3.8) をもつことは示された。 □

[21] マルチンゲールの表現定理の証明は [F] による。

定理 3.9 は d 次元 Brown 運動にも拡張できる。$B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ を Brown 運動とし $\mathcal{F}_t^B$ はこの B_t から定めたものとする。

定理 3.10 $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ とすると、$f^j \in \mathcal{L}_T^2(\langle B \rangle)$, $1 \le j \le d$ が存在して

$$Y = E[Y] + \sum_{j=1}^d \int_0^T f_s^j \, dB_s^j \tag{3.10}$$

と表すことができる。

証明: まず、$Y = e^{i\xi\cdot(B_t - B_r)}$, $0 \le r < t \le T$, $\xi \in \mathbf{R}^d$ に対し表現 (3.10) の存在を示せばよいが、それは定理 3.9 の証明の第 1 段と同様 $\varphi(t,x) = e^{i\xi\cdot x + |\xi|^2 t/2}$ に対して伊藤の公式を用いればよい。それ以降の部分も全く同様に証明できる。 □

次の定理は、マルチンゲールは Brown 運動の時刻変更により表現できることを表している。

定理 3.11 $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ が $\lim_{t\to\infty} \langle M \rangle_t = \infty$ *a.s* を満たしているとする。このとき、$\tau_t = \inf\{\, s; \langle M \rangle_s > t \,\}$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$ とすると、$B_t = M_{\tau_t}$ は $(\mathcal{G}_t)$-*Brown* 運動である。したがって、$M_t = B_{\langle M \rangle_t}$ と表すことができる。

証明: <u>第 1 段</u>: τ_t は stopping time で $\lim_{t\to\infty} \langle M \rangle_t = \infty$ より $\tau_t < \infty$ a.s であり、$t \mapsto \tau_t$ は単調増加で右連続となる。よって、$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$ は定義され $t \mapsto \mathcal{G}_t$ も単調増加で右連続となる。次に $t \mapsto M_{\tau_t}$ が連続であることを示す。このためには、$t_1 < t_2$ に対して

$$\{\, \omega \,; \langle M \rangle_{t_1} = \langle M \rangle_{t_2} \} \subset \{\, \omega \,; M_t = M_{t_1}, t_1 \le t \le t_2 \} \tag{3.11}$$

を示せばよい。実際、$t \mapsto \tau_t$ は右連続だから、M_{τ_t} は右連続であるが、一方、$s_n \uparrow t$ $(n \to \infty)$ のとき、$u = \lim_{n\to\infty} \tau_{s_n}$ とすると、$\langle M \rangle_u = \lim_{n\to\infty} \langle M \rangle_{\tau_{s_n}} = \lim_{n\to\infty} s_n = t = \langle M \rangle_{\tau_t}$. よって、(3.11) により $M_u = M_{\tau_t}$ となるので左連続性も従う。

(3.11) を示そう。$\sigma = \inf\{\, s > t_1 \,; \langle M \rangle_s > \langle M \rangle_{t_1} \}$, $N_u = M_{(t_1+u)\wedge\sigma} - M_{t_1}$ とおくと、σ は stopping time で (N_u) は $\hat{\mathcal{F}}_u := \mathcal{F}_{(t_1+u)\wedge\sigma}$ について局所マルチンゲールとなるが、$\langle N \rangle_u = \langle M \rangle_{(t_1+u)\wedge\sigma} - \langle M \rangle_{t_1} = 0$ であるから、$N_u = 0$. 従って、$M_{(t_1+u)\wedge\sigma} - M_{t_1} = 0$ となる。

<u>第 2 段</u>: $0 \le s_1 < s_2$ を勝手に取る。$\hat{M}_t = M_{t\wedge\tau_{s_2}}$ とおくと、$\langle \hat{M} \rangle_t \le \langle M \rangle_{t\wedge\tau_{s_2}} \le s_2$ となるから、次の補題 3.12 により $\hat{M}, \hat{M}^2 - \langle \hat{M} \rangle$ は $0 \le t \le \infty$ のマルチンゲールとなる。よって、

$$\begin{aligned} E[B_{s_2} - B_{s_1} | \mathcal{G}_{s_1}] &= E[\hat{M}_{\tau_{s_2}} - \hat{M}_{\tau_{s_1}} | \mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] = 0 \\ E[(B_{s_2} - B_{s_1})^2 | \mathcal{G}_{s_1}] &= E[(\hat{M}_{\tau_{s_2}} - \hat{M}_{\tau_{s_1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] = E[\langle \hat{M} \rangle_{\tau_{s_2}} - \langle \hat{M} \rangle_{\tau_{s_1}} | \mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] = s_2 - s_1 \end{aligned}$$

となるので、$B_s \in \mathcal{M}_c^2(\mathcal{G}_s)$ であり、$\langle B \rangle_s = s$ となるので、Lévy の定理 (例 3.2) により B_s は $(\mathcal{G}_s)$-Brown 運動である。 □

補題 3.12 $M \in \mathcal{M}_c^2$ であり、$E[\langle M \rangle_\infty] < \infty$ とする。このとき、M, M^2 はともに一様可積分であり、 特に、(M_t), $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ は $0 \le t \le \infty$ でマルチンゲールとなる。

証明: 仮定より、$E[M_t] \le E[M_t^2] = E[\langle M \rangle_t] \le E[\langle M \rangle_\infty] < \infty$ となるから、マルチンゲールの収束定理 (定理 2.10) により、M_∞ は存在し、特に Fatou の補題により $E[M_\infty^2] \le \liminf_{t\to\infty} E[\langle M \rangle_t] = E[\langle M \rangle_\infty] < \infty$ となるので、$M_\infty \in L^2$ となる。Jensen の不等式により $M_t^2 = E[M_\infty | \mathcal{F}_t]^2 \le E[M_\infty^2 | \mathcal{F}_t]$ となるから、

$$E[M_t^2, |M_t^2| \ge \lambda] \le E[E[M_\infty^2 | \mathcal{F}_t], |M_t^2| \ge \lambda] \le E[M_\infty^2, |M_t^2| \ge \lambda]$$

となるが、$P(|M_t^2| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda} E[M_t^2] = \frac{1}{\lambda} E[\langle M \rangle_t] \le \frac{1}{\lambda} E[\langle M \rangle_\infty] \to \infty$ $(\lambda \to \infty)$ となるので、(M_t^2) は一様可積分であることがわかる。同様に (M_t) 及び $(\langle M \rangle_t)$ の一様可積分性も示されるので、$(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ の一様可積分性もわかる。従って、再びマルチンゲールの収束定理により (M_t), $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ は $0 \le t \le \infty$ でマルチンゲールとなることがわかる。 □

定理 3.11 を多次元に拡張した次の定理は Knight の定理と呼ばれる。

定理 3.13 $M=(M^1,\dots,M^d)\in\mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ が $\lim_{t\to\infty}\langle M^k\rangle_t=\infty$, $k=1,\dots,d$ を満たし、$\langle M^k,M^l\rangle_t=0$ $(k\neq l)$ であるとする。このとき、$\tau_t^k=\inf\{\,s\,;\langle M^k\rangle_s>t\,\}$ とし、$B_t^k=M^k_{\tau_t^k}$ とすると、$B_t=(B_t^1,\dots,B_t^d)$ は d 次元 *Brown* 運動である。

証明: 定理 3.11 より、$B^1,\dots,B^d$ が独立であることを示せばよい。このためには、compact な support をもつ[22]有界 Borel 可測関数 $f_k:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $1\le k\le d$, に対して、

$$E[e^{i\sum_{k=1}^d\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k}]=\prod_{k=1}^d E[e^{i\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k}] \tag{3.12}$$

を示せばよい。実際、$0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ と $\xi_j^k\in\mathbf{R}$ に対して、$f_k(s)=\sum_{j=1}^m\xi_j^k 1_{[t_{j-1},t_j)}(s)$ とすると、$\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k=\sum_{j=1}^m\xi_j^k(B_{t_j}^k-B_{t_{j-1}}^k)$ となるから、(3.12) は $B^1,\dots,B^d$ の独立性を意味する。

では (3.12) を示そう。まず、脚注の事柄に注意すると、伊藤の公式により

$$E[e^{i\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k+\frac12\int_0^\infty f_k(s)^2\,ds}]=1. \tag{3.13}$$

また、$L_t=\sum_{k=1}^d\int_0^t f_k(\langle M^k\rangle_s)\,dM_s^k$ とおくと、ある定数 c があって

$$\langle L\rangle_t=\sum_{k=1}^d\int_0^t f_k(\langle M^k\rangle_s)^2\,d\langle M^k\rangle_s\le\sum_{k=1}^d\int_0^t f_k(s)^2\,ds\le c$$

となる。これより、$E[e^{iL_t+\frac12\langle L\rangle_t}]=1$ であるが、補題 3.12 と有界収束定理により $t\to\infty$ として $E[e^{iL_\infty+\frac12\langle L\rangle_\infty}]=1$ を得る。ところで、$L_\infty=\sum_{k=1}^d\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k$, $\langle L\rangle_\infty=\sum_{k=1}^d\int_0^\infty f_k(s)^2\,ds$ であるから、

$$E[e^{i\sum_{k=1}^d\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k+\sum_{k=1}^d\int_0^\infty f_k(s)^2\,ds}]=1.$$

よって、これと (3.13) の $k=1,\dots,d$ に関する積は等しいが、その両辺を定数 $e^{\sum_{k=1}^d\int_0^\infty f_k(s)^2\,ds}$ で割ることで (3.12) が得られる。 □

3.4 Girsanov の定理

まず、指数型マルチンゲールについての次の定理を証明しよう。(3.14) は Novikov の判定条件と呼ばれる。

定理 3.14 $X\in\mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$, $X_0=0$ なる X に対して $e(X)_t:=e^{X_t-\frac12\langle X\rangle_t}$ は局所マルチンゲールかつ優マルチンゲールとなる。さらに、

$$E[e^{\frac12\langle X\rangle_t}]<\infty,\qquad\forall t \tag{3.14}$$

を満たすとき、$e(X)_t$ はマルチンゲールとなる。

補題 3.15 *Brown* 運動 B_t に対して、$\rho_b=\inf\{t;B_t-t\le b\}$, $b<0$, とするとき、$E[e^{B_{\rho_b}-\frac12\rho_b}]=1$ となる。

証明: $\varphi(t,x)=e^{-\lambda t-(\sqrt{1+2\lambda}-1)x}$ とおくと、これは $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac12\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$ を満たすから、$\varphi(t,B_t-t)-\varphi(0,0)$ は局所マルチンゲールである。$\lambda\ge0$, $x-t\ge b$ のとき

$$0\le\varphi(t,x)\le e^{-\lambda t-(\sqrt{1+2\lambda}-1)(b+t)}\le e^{-(\sqrt{1+2\lambda}-1)b}$$

となるので、$\varphi(t,B_t-t)-\varphi(0,0)$ は有界なマルチンゲールとなり、ρ_b は stopping time であるから任意抽出定理により

$$E[\varphi(t\wedge\rho_b,B_{t\wedge\rho_b}-t\wedge\rho_b)]=1.$$

[22] $\{s;f(s)\neq0\}$ の閉包を f の support という。特に (3.12) の確率積分においては、ある $T>0$ があって $f_k(s)=0$ $(s\ge T)$ とできるので、$\int_0^\infty f_k(s)\,dB_s^k=\int_0^T f_k(s)\,dB_s^k$ とできる。

ここで、$\rho_b \le \sigma_{\{b\}} := \inf\{t; B_t = b\}$ であるから、例 2.2 により $\rho_b \le \sigma_{\{b\}} < \infty$ a.s. となる。よって、上式で $t \to \infty$ として $E[e^{-\lambda\rho_b - (\sqrt{1+2\lambda}-1)b}] = 1$ を得る。これは、

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(\rho_b \in ds) = e^{(\sqrt{1+2\lambda}-1)b}$$

となることを意味しており、さらに、これは $\lambda \ge -\frac{1}{2}$ において成立することもわかる。よって、$E[e^{\frac{1}{2}\rho_b}] = e^{-b}$ となるので、$E[e^{B_{\rho_b} - \frac{1}{2}\rho_b}] = E[e^{b+\rho_b - \frac{1}{2}\rho_b}] = e^b E[e^{\frac{1}{2}\rho_b}] = 1$ を得る。 □

定理 3.14 の証明: $f(x,y) = e^{x - \frac{1}{2}y}$ とおくと、伊藤の公式により

$$e(X)_t - 1 = f(X_t, \langle X\rangle_t) - f(0,0) = \int_0^t e^{X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s}\, dX_s$$

となるから $e(X)_t$ は局所マルチンゲールとなる。$\tau_n = \inf\{t > 0\,; |X_t| > n\}$ とおくと、$e(X)_{t\wedge\tau_n}$ は有界なマルチンゲールだから、$0 \le s < t$ と $A \in \mathcal{F}_s$ に対して、$E[e(X)_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s] = e(X)_{s\wedge\tau_n}$ より、$E[e(X)_{t\wedge\tau_n}/e(X)_{s\wedge\tau_n}, A] = P(A)$. Fatou の補題を用いて $n \to \infty$ とすると $E[e(X)_t/e(X)_s, A] \le P(A)$, 即ち、$E[e(X)_t|\mathcal{F}_s] \le e(X)_s$ となり、$e(X)_t$ は優マルチンゲールとなる。

次に、X が条件 (3.14) を満たすとし、$e(X)_t$ がマルチンゲールとなることを示す。このためには $E[e(X)_t] = E[e(X)_0] = 1$ を示せばよい。実際 $e(X)_t$ が優マルチンゲールであるがマルチンゲールでないとすると、ある $0 \le s < t$ と $A \in \mathcal{F}$ に対し $E[e(X)_t, A] < E[e(X)_s, A]$ となる。ここで、$E[e(X)_t] = E[e(X)_s] = 1$ であるから、これは $E[e(X)_t, A^c] > E[e(X)_s, A^c]$ を意味する。しかし、これは $e(X)_t$ は優マルチンゲールであることに矛盾する。

$E[e(X)_t] = 1$ を示す。定理 3.11 の記号のもと、ある $(\mathcal{F}_{\tau_t})$-Brown 運動 B_t があって $X_t = B_{\langle X\rangle_t}$ と表される。補題 3.15 の記号のもと、$Y_t = e^{B_{\rho_b\wedge t} - \frac{1}{2}\rho_b\wedge t}$ は非負のマルチンゲールであるから Fatou の補題により Y_t は $0 \le t \le \infty$ で優マルチンゲールとなる。ここで、補題 3.15 より $E[Y_\infty] = 1$ であるから、すべての t について $E[Y_t] = 1$ となり、先程と同様の議論から (Y_t) は $0 \le t \le \infty$ におけるマルチンゲールとなる。従って、任意の stopping time σ に対して $E[Y_\sigma] = 1$ となる。ところで、$\langle X\rangle_t$ は $(\mathcal{F}_{\tau_t})$-stopping time である。実際、$\forall a, u \ge 0$ に対して $\{\langle X\rangle_t \le a\} \cap \{\tau_a \le u\} = \{\langle X\rangle_t \le a\} \cap \{\langle X\rangle_u \ge a\}$ となり、これは $u < t$ なら $\emptyset$ であり、$u \ge t$ なら $\mathcal{F}_u$ 可測となるので、$\{\langle X\rangle_t \le a\} \in \mathcal{F}_{\tau_a}$ を得る。よって、$E[Y_{\langle X\rangle_t}] = 1$ となり、特に、

$$E[e^{B_{\rho_b} - \frac{1}{2}\rho_b}, \rho_b \le \langle X\rangle_t] + E[e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}, \rho_b > \langle X\rangle_t] = 1$$

となるが、(左辺の第一項)$\le e^b E[e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}] \to 0$, $\rho_b \to \infty$ $(b \to -\infty)$ であるので、$E[e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}] = 1$ を得る。
□

$X \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$, $X_0 = 0$ なる X に対して $e(X)_t := e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}$ がマルチンゲールになる、即ち、$E[e(X)_t] = 1$ とする。$T > 0$ に対し、$(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度 $\hat{P}$ を

$$\hat{P}(A) = E[e(X)_T, A], \qquad A \in \mathcal{F}_T$$

と定義する。このとき、$e(X)_t$ はマルチンゲールだから、$t \le T$ に対して、

$$\hat{P}(A) = E[e(X)_t, A], \qquad A \in \mathcal{F}_t$$

となることに注意する。これより $\hat{P}$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とみなせる。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{P})$ と filtration $(\mathcal{F}_t)$ についての二乗可積分連続マルチンゲールの空間、連続局所マルチンゲールの空間をそれぞれ $\hat{\mathcal{M}}_c^2$, $\hat{\mathcal{M}}_{c,\mathrm{loc}}$ で表す。また、(B_t) を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とする。このとき、次の定理は Girsanov の定理と呼ばれている。Cameron-Martin-Dynkin-Maruyama-Girsanov の定理と呼ぶこともある。

定理 3.16 *(1)* $Y \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ とし、$\hat{Y}_t = Y_t - \langle Y, X\rangle_t$ とおくとき、$\hat{Y} \in \hat{\mathcal{M}}_{c,\mathrm{loc}}$ である。
(2) $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ に対し、$\hat{Y}_{j,t} = Y_{j,t} - \langle Y_j, X\rangle_t$, $j = 1, 2$ と定義すれば、$\langle \hat{Y}_1, \hat{Y}_2\rangle = \langle Y_1, Y_2\rangle$ となる。
(3) $B_t = (B_1^1, \cdots, B_t^d)$ を P のもとでの d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-*Brown* 運動とし、$\hat{B}_t^j = B_t^j - \langle B^j, X\rangle_t$, $j = 1, \ldots, d$, とおくとき、$\hat{B}_t = (\hat{B}_1^1, \cdots, \hat{B}_t^d)$ は $\hat{P}$ のもとでの d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-*Brown* 運動となる。

証明: (1) $\tau_n = \inf\{t\,; |X_t| \vee |Y_t| > n\}$ とおき、$\hat{Y}^{\tau_n} = Y^{\tau_n} - \langle Y^{\tau_n}, X^{\tau}\rangle \in \mathcal{M}_c$ を示せばよいので、はじめから X, Y は有界なマルチンゲールとしてよい。伊藤の公式により、

$$
\begin{aligned}
&\hat{Y}_t e(X)_t - \hat{Y}_0 = (Y_t - \langle Y, X\rangle_t) e(X)_t - Y_0 \\
&= \int_0^t Y_s\, de(X)_s + \int_0^t e(X)_s\, dY_s + \langle Y, e(X)\rangle_t - \int_0^t \langle Y, X\rangle_s\, de(X)_s - \int_0^t e(X)_s d\langle Y, X\rangle_s \\
&= \int_0^t Y_s\, de(X)_s + \int_0^t e(X)_s\, dY_s - \int_0^t \langle Y, X\rangle_s\, de(X)_s
\end{aligned}
$$

となる ($\langle Y, e(X)\rangle_t = \int_0^t e(X)_s\, d\langle Y, X\rangle_s$ に注意) ので、$E[\hat{Y}_t e(X)_t | \mathcal{F}_s] = \hat{Y}_s e(X)_s$ a.s. $(s < t)$ を得る。
(2) $\hat{Y}_1 \pm \hat{Y}_2 = Y_1 \pm Y_2 - \langle Y_1 \pm Y_2, X\rangle$ より、$\langle \hat{Y}\rangle = \langle Y\rangle$, 即ち、$(\hat{Y}^2 - \langle Y\rangle) e(X)$ が P についてマルチンゲールになることを示せばよい。これは伊藤の公式により、

$$
\begin{aligned}
&(\hat{Y}_t^2 - \langle Y\rangle_t) e(X)_t - \hat{Y}_0^2 = (Y_t^2 - \langle Y\rangle_t - 2\langle Y, X\rangle_t Y_t + \langle Y, X\rangle_t^2) e(X)_t - Y_0^2 \\
&= \left(Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s\, dY_s - 2\int_0^t \langle Y, X\rangle_s\, dY_s - 2\int_0^t Y_s\, d\langle Y, X\rangle_s + \langle Y, X\rangle_t^2\right) e(X)_t - Y_0^2 \\
&= \text{martingale} + 2\int_0^t Y_s\, d\langle Y, e(X)\rangle_s - 2\int_0^t \langle Y, X\rangle_s\, d\langle Y, e(X)\rangle_s - 2\int_0^t Y_s e(X)_s\, d\langle Y, X\rangle_s \\
&\quad +2\int_0^t e(X)_s \langle Y, X\rangle_s\, d\langle Y, X\rangle_s
\end{aligned}
$$

となるので、(1) と同様 $Z \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}$ に対して $\langle Z, e(X)\rangle_t = \int_0^t e(X)_s\, d\langle Z, X\rangle_s$ となるから主張を得る。
(3) (1) より $\hat{B}$ は $\hat{P}$ のもとマルチンゲールである。さらに、(2) より $\langle \hat{B}^k, \hat{B}^l\rangle_t = \langle B^k, B^l\rangle_t = \delta_{kl} t$. 従って、Lévy の定理 (例 3.2) により、$\hat{B}$ は d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動となる。 □

4 確率微分方程式

4.1 解の存在と一意性

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と、仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)$ があり、その上に N 次元 Brown 運動 $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^N)$ が与えられているとする。また、$\alpha_k^j(t, x, \omega), b^j(t, x, \omega), 1 \le j \le d, 1 \le k \le N,$ を $[0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times \Omega$ 上の実数値 Borel 可測関数かつ $\forall x$ に対して $\alpha_k^j(\cdot, x, \cdot), b^j(\cdot, x, \cdot)$ は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測とし、これらを成分とする $d \times N$ 行列 $\alpha = \alpha(t, x, \omega) = (\alpha_k^j(t, x, \omega))_{1 \le j \le d, 1 \le k \le N}$ と d 次元ベクトル $b = b(t, x, \omega) = (b^j(t, x, \omega))_{1 \le j \le d}$ を考える。このとき、$X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^d)$ に対する形式的な方程式

$$
dX_t(\omega) = \alpha(t, X_t(\omega), \omega)\, dB_t(\omega) + b(t, X_t(\omega), \omega)\, dt \tag{4.1}
$$

あるいは成分ごとに書いて

$$
dX_t^j(\omega) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^j(t, X_t(\omega), \omega)\, dB_t^k(\omega) + b^j(t, X_t(\omega), \omega)\, dt, \qquad 1 \le j \le d
$$

を確率微分方程式という。α を拡散係数, b は drift 係数とよばれる。行列 ${}^t\alpha\alpha$ を拡散係数とよぶこともある。確率微分方程式 (4.1) は、積分形に直すことによって数学的な意味が与えられる。

定義 4.1 $X = (X_t)$ が、出発点 $x \in \mathbf{R}^d$ をもつ確率微分方程式 *(4.1)* の解であるとは、X は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $(\mathcal{F}_t)$-*adapted* かつ可測な $\mathbf{R}^d$-値連続確率過程で次を満たすときにいう。

(i) $\forall j, k$ に対し、$\alpha_k^j(t, X_t) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$, $b^j(t, X_t) \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$ *a.s.* ここで、$\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ は *Brown* 運動に対して定義されているものとし、後者は $\int_0^T |b^j(t, X_t)|\, dt < \infty$, $\forall T > 0$, *a.s.* とする。

(ii) 確率積分方程式

$$X_t(\omega) = x + \int_0^t \alpha(s, X_s(\omega), \omega)\, dB_s(\omega) + \int_0^t b(s, X_s(\omega), \omega)\, ds \tag{4.2}$$

を満たす。

以下、ω を省略して、(4.2) を $X_t = x + \displaystyle\int_0^t \alpha(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds$ とかくこととする。

上の定義で、条件 (i) は (4.2) の右辺が意味を持つための条件である。常微分方程式の Lipschitz 条件から解の存在と一意性が従うという Cauchy の定理と同様に確率微分方程式においても次の定理が成立する。$d \times N$ 行列 $\alpha = (\alpha_k^j)$ に対して、$\|\alpha\|^2 = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^N |\alpha_k^j|^2$ とおく。

定理 4.1 係数 α, b は x について *Lipschitz* 連続性と $x = 0$ での二乗可積分性の条件を仮定する *:* $\forall T > 0$ に対し $K = K_T > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} \|\alpha(t,x,\omega) - \alpha(t,y,\omega)\| + |b(t,x,\omega) - b(t,y,\omega)| \;&\le\; K|x-y|, \quad \forall t \in [0,T],\ \forall x, y \in \mathbf{R}^d,\ \forall \omega \in \Omega \quad (4.3) \\ E[\int_0^T (\|\alpha(t,0)\|^2 + |b(t,0)|^2)\, dt] \;&\le\; K. \quad (4.4) \end{aligned}$$

このとき、*(4.1)* の解 $X = (X_t^1, \cdots, X_t^d)$ で、$E[\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^2] < \infty$ となるのもが存在する。しかも解は一意的である。言い換えれば、$X, \tilde{X}$ がともに解でならば $X_t = \tilde{X}_t,\ t \ge 0,$ *a.s.* となる。

証明: 第 1 段: $\forall T > 0$ を固定し、区間 $[0,T]$ における解の存在と一意性を示せば十分である。実際、区間 $[0,T]$ における解を $X^T = (X_t^T)_{0 \le t \le T}$ とすると、一意性より $T < T'$ のとき $X_t^T = X_t^{T'}$, $0 \le t \le T$, となるから、$X_t := X_t^T$, $0 \le t \le T$, として定めれば、$(X_t)_{t \ge 0}$ は (4.1) の一意解となるからである。

第 2 段: 解の存在を示すため、逐次近似法を用いる。即ち、$X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{0 \le t \le T}$, $n \in \mathbf{N}$ を以下のように定義する。$X_t^{(1)} = x\ (0 \le t \le T)$ とおき、$X_t^{(n-1)}$ が定義されたとき、

$$X_t^{(n)} = x + \int_0^t \alpha(s, X_s^{(n-1)})\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)})\, ds \tag{4.5}$$

と定める。ただし、(4.5) が意味を持つためには $\alpha_k^j(t, X_t^{(n-1)}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$, $b^j(t, X_t^{(n-1)}) \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ a.s. でなければならない。このため、まず $n \ge 1$ に対して、

$$X^{(n)} = (X_t^{(n)}) \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-adapted} \tag{4.6}$$

$$E[\sup_{0 \le t \le T} |X_t^{(n)}|^2] < \infty \tag{4.7}$$

を帰納法により示す。$n = 1$ のときは $X_t^{(n)} = x$ であるから自明である。$n - 1$ のとき、(4.6), (4.7) が成り立つとする。このとき、(4.3), (4.4) により

$$\begin{aligned} E[\int_0^t \|\alpha(s, X_s^{(n-1)})\|^2\, ds] \;&\le\; 2E[\int_0^t \|\alpha(s, X_s^{(n-1)}) - \alpha(s,0)\|^2\, ds] + 2E[\int_0^t \|\alpha(s,0)\|^2\, ds] \\ &\le\; 2K^2 T E[\sup_{0 \le s \le T} |X_s^{(n-1)}|^2] + 2K, \qquad 0 \le t \le T \quad (4.8) \\ E[\int_0^t |b(s, X_s^{(n-1)})|^2\, ds] \;&\le\; 2E[\int_0^t |b(s, X_s^{(n-1)}) - b(s,0)|^2\, ds] + 2E[\int_0^t |b(s,0)|^2\, ds] \\ &\le\; 2K^2 T E[\sup_{0 \le s \le T} |X_s^{(n-1)}|^2] + 2K, \qquad 0 \le t \le T \quad (4.9) \end{aligned}$$

となるので、特に、$\alpha_k^j(t, X_t^{(n-1)}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$, $b^j(t, X_t^{(n-1)}) \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ a.s. となり、(4.5) の右辺は定義でき、(4.6) が従う。また、次のような計算により (4.7) は従う:

$$E[\sup_{0 \le t \le T} |X_t^{(n)}|^2] \;\le\; 3|x|^2 + 3E[\sup_{0 \le t \le T} |\int_0^t \alpha(s, X_s^{(n-1)})\, dB_s|^2] + E[\sup_{0 \le t \le T} |\int_0^t b(s, X_s^{(n-1)})\, ds|^2]$$

$$
\begin{aligned}
&\le \quad 3|x|^2 + 12E[\int_0^T \|\alpha(s, X_s^{(n-1)})\|^2\, ds] + 3TE[\int_0^T |b(s, X_s^{(n-1)})|^2\, ds] \\
&\le \quad 3|x|^2 + 6(4+T)(K^2TE[\sup_{0\le t\le T} |X_s^{(n-1)}|^2] + K).
\end{aligned}
$$

ここで、1 行目の右辺から 2 行目への変形については第 2 項については Doob の不等式及び補題 3.4 (2) を、第 3 項については Schwarz の不等式を用い、2 行目から 3 行目への変形については (4.8), (4.9) を用いた。

第 3 段: $\{X^{(n)}\}_n$ が収束列で、その極限が求める解であることを示す。$n \ge 3$, $t \in [0, T]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&E[\sup_{0\le r\le t} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2] \qquad (4.10)\\
&\le 2E[\sup_{0\le r\le t} |\int_0^r \{\alpha(s, X_s^{(n-1)}) - \alpha(s, X_s^{(n-2)})\}\, dB_s|^2] + 2E[\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \{b(s, X_s^{(n-1)}) - b(s, X_s^{(n-2)})\}\, ds|^2] \\
&\le 8E[\int_0^t \|\alpha(s, X_s^{(n-1)}) - \alpha(s, X_s^{(n-2)})\|^2\, ds] + 2tE[\int_0^t |b(s, X_s^{(n-1)}) - b(s, X_s^{(n-2)})|^2\, ds] \\
&\le C_1 \int_0^t E[|X_s^{(n-1)} - X_s^{(n-2)}|^2]\, ds
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$C_1 = (8 + 2T)K_T^2$ である。これより、

$$
E[\sup_{0\le r\le t} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2] \le \frac{(C_1 t)^{n-2}}{(n-2)!} C_2
$$

となる。ただし、$C_2 = E[\sup_{0\le r\le t} |X_r^{(2)} - X_r^{(1)}|^2]$ である。これより、特に、

$$
\lim_{m,n\to\infty} E[\sup_{0\le r\le T} |X_r^{(m)} - X_r^{(n)}|^2] = 0
$$

を得るので、補題 2.16 により、連続確率過程 X_t が存在して、$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\le r\le T} |X_r^{(n)} - X_r|^2] = 0$ となる。これより $E[\sup_{0\le r\le T} |X_r|^2] < \infty$ は明らかである。さらに、α の Lipschitz 連続性より

$$
\int_0^t \alpha_k^j(s, X_s^{(n)})\, dB_s^k \to \int_0^t \alpha_k^j(s, X_s)\, dB_s^k \quad \text{in} \quad \mathcal{M}_T \quad (n \to \infty)
$$

となる。ここで、$\mathcal{M}_T$ には内積 $E[\langle \cdot, \cdot \rangle_T]$ が入っている (*cf*. 命題 2.20)。これより、特に、この収束は任意の $t > 0$ を固定して $L^2 := L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 内で言える。一方、同様に b の Lipschitz 連続性より

$$
\int_0^t b_k(s, X_s^{(n)})\, ds \to \int_0^t b_k(s, X_s)\, ds \quad \text{in} \quad L^2 \quad (n \to \infty).
$$

以上より、$P(\forall t > 0$ に対し (4.2) が成立する$) = 1$ がいえ、この X_t が求める解であることが示された。

第 4 段: 一意性を示す。X_t, X_t' がともに (4.1) の解であると仮定する。ここで、これらが $\mathcal{L}^2$ に属することは仮定しない。このとき、

$$
\tau_l = \inf\{\, t \ge 0\, ; |X_t| \vee |X_t'| \ge l\,\}, \qquad l \in \mathbf{N}
$$

とすると、(4.10) と同様にして

$$
E[|X_{t\wedge\tau_l} - X'_{t\wedge\tau_l}|^2] \le C_1 \int_0^t E[|X_s - X_s'|^2]\, ds
$$

を得る。よって、次の Gronwall の不等式 (補題 4.2) により、$E[|X_{t\wedge\tau_l} - X'_{t\wedge\tau_l}|^2] = 0$, $t \in [0, T]$ を得る。従って、$P(\forall t > 0$ に対し $X_{t\wedge\tau_l} = X'_{t\wedge\tau_l}) = 1$ がわかる。ところが、X_t, X_t' の連続性により $\lim_{l\to\infty} \tau_l = \infty$ となるから、解の一意性が示される。 □

補題 4.2 *(Gronwall の補題)* $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ は区間 $[a,b]$ で連続で、$\psi(t) \geq 0$ とする。このとき、

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) w(s)\, ds \qquad (a \leq t \leq b)$$

ならば、次が

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\varphi(s) e^{\int_s^t \psi(u)\, du}\, ds \qquad (a \leq t \leq b)$$

が成立する。

注意 4.1 *(1)* $X_0 = x$ のかわりに *2* 乗可積分で $\mathcal{F}_0$ 可測な確率変数 ξ に対し、$X_0 = \xi$ を満たす確率微分方程式 *(4.1)* の解 *((4.2)* で x の代わりに ξ とした確率積分方程式で定義される*)* が一意的に存在することが上記と同様に証明できる。この ξ を $X = (X_t)$ の初期分布という。

(2) 係数が *Lipschitz* 連続でなければ、解は必ずしも一意とは限らない *(cf.* 常微分方程式における $x' = |x|^\beta$, $0 < \beta < 1$ の場合を考えよ*)*。例えば $0 < \beta < 1$ として確率微分方程式

$$dX_t = \frac{2}{1-\beta}|X_t|^{(1+\beta)/2}\, dB_t + \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2} X_t |X_t|^{\beta-1}\, dt, \quad X_0 = 0 \tag{4.11}$$

を考えれば、伊藤の公式により $X_t = |B_t|^{2/(1-\beta)} \operatorname{sgn} B_t$ が解であることは容易に確かめられる。ただし、$\operatorname{sgn} x = 1$ *(*$x \geq 0$*)*, $= -1$ *(*$x < 0$*)* である。しかし、$X_t \equiv 0$ も自明な解であるし、両者を組み合わせて $\forall t_0 > 0$ に対し

$$X_t = 0,\ t \in [0, \tau_{t_0}]; \qquad X_t = |B_t|^{2/(1-\beta)} \operatorname{sgn} B_t,\ t \in [\tau_{t_0}, \infty)$$

を考えてもやはり解になる。ここで $\tau_{t_0} = \inf\{t \geq t_0; B_t = 0\}$ である。このように *(4.11)* について解の一意性が成立しないのは、ドリフト項に現われる関数 $b(x) = x|x|^{\beta-1}$ が *Lipschitz* 連続でないためである。

拡散係数 α, drift 係数 b がともに $\omega \in \Omega$ によらない関数のとき、定理 4.1 で示していることは $[0,\infty) \times \mathbf{R}^d \times C([0,\infty), \mathbf{R}^d)$ 上の Borel 可測で各 $t \in [0,\infty)$ について $F_t(x,w)$ は $(w_t)_{t\in[0,T]}$ のみに依存するような関数 $F_t(x,w)$ が一意的に存在して、(4.1) の解 X_t は $X_t(\omega) = F_t(x, B(\omega))$ と表されることを意味している。このような解を確率微分方程式 (4.1) の**強解** (strong solution) という[23]。次の節で示すようにもし確率微分方程式 (4.1) の解が存在して一意ならば Markov 過程となる。このため、この場合を Markov 型という。定理 4.1 より、もし α, b が Lipschitz 条件 (4.3) と条件: $\forall T > 0$ に対し $K = K_T > 0$ が存在して $\forall t \in [0,T]$ に対して、

$$\|\alpha(t,0)\| + |b(t,0)| \quad \leq \quad K \tag{4.12}$$

を満たせば強い解は存在して一意的となる。

このほか $N = d = 1$ とおいた Markov 型の確率微分方程式について以下の事実が知られている。証明は [KS] §5.2 命題 2.13 を見よ。

定理 4.3 *(山田-渡辺)* 係数 $\alpha, b : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $\forall t \in [0,\infty)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ に対して、

$$|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| \quad \leq \quad \rho(|x-y|), \tag{4.13}$$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \quad \leq \quad K|x-y| \tag{4.14}$$

を満たすとする。ここで、$K > 0$ は定数で、$\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\int_0^\varepsilon \frac{dx}{\rho(x)^2} = \infty$$

を満たすものとする。このとき、確率微分方程式 *(4.1)* の強解が存在して一意となる。

[23] これは厳密には強い一意性が成り立つと言うべきであろう。**弱解** (weak solution) についてはこの授業では扱わないが、簡単に言うと解の分布が一意的であるときにいう。強解が一意的に存在すれば、弱解も一意的であることが知られている ([KS] §5.3 命題 3.20)。また、逆が成立しないことは田中の例として有名である ([KS] §5.3 例 3.5)。

注意 4.2 この定理により、*1* 次元確率微分方程式

$$dX_t = |X_t|^{\beta}\, dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{4.15}$$

について、$\beta \geq 1/2$ では解は一意である。一方、$0 < \beta < 1/2$ のときは解の一意性が成立しないことが *Girsanov* により知られている *([KS] §5.2* 例 *2.15)*。

例 4.1 例 *3.3* のように、B_t を x から出発する δ 次元 *Brown* 運動とし、$r_t = |B_t|$ とおく。このとき、伊藤の公式により

$$r_t^2 = r_0^2 + 2\sum_{j=1}^{\delta}\int_0^t B_s^j\, dB_s^j + \delta t = r_0^2 + 2\int_0^t r_s\, d\widetilde{B}_s + \delta t$$

を得る。ここで、$\widetilde{B}_t := \sum_{j=1}^{\delta}\int_0^t B_s^j/r_s\, dB_s^j$ とすると $\langle \widetilde{B}\rangle_t = \sum_{j=1}^{\delta}\int_0^t (B_s^j/r_s)^2\, ds = t$ だから *Lévy* の定理により新たな $(\mathcal{F}_t)$-*Brown* 運動である。したがって、$x_t := r_t^2 \geq 0$ は

$$dx_t = 2\sqrt{x_t}\, d\widetilde{B}_t + \delta\, dt, \qquad x_0 = r_0^2 \geq 0 \tag{4.16}$$

なる微分方程式を満たす。$\sqrt{x}$ は $x \geq 0$ について $1/2$ 次 *Hölder* 連続だから、定理 *4.3* から *1* 次元の確率微分方程式 *(4.16)* は一意解をもつことがわかる。ここで、δ が正の実数ならば、*(4.16)* は定義され上記定理より一意解を持つことに注意する。特に、次節の定理 *4.4* より x_t は $[0,\infty)$ 上の *Markov* 過程であり、従って、r_t も *Markov* 過程になる。r_t 自身のみたす確率微分方程式は、

$$dr_t = d\widetilde{B}_t + \frac{\delta - 1}{2r_t}\, dt$$

であることが知られている *([RY] Chp.XI §1)*。実際、δ が *2* 以上の自然数であれば、$r_t = |B_t|$ となることから伊藤の公式により直接証明できる *([KS] §3.3 Prop.3.2)*。r_t の推移確率は変形 *Bessel* 関数を用いて具体的に記述することができるので、r_t は δ 次の **Bessel 過程**とよばれている *([RY] p.441)*[24]。また、*(4.16)* の解 x_t は δ 次の **2 乗 Bessel 過程**とよばれる。この δ 次の *2* 乗 *Bessel* 過程 $x = (x_t)$, $x_0 > 0$ について以下のことが知られている。

(i) $0 < \delta < 2$ のとき $X_t \geq 0$ $(\forall t \geq 0)$ *a.s.* でほとんど確実にある時刻 t で $X_t = 0$ となるが、0 に滞在する時間は 0 となる。

(ii) $\delta \geq 2$ のとき $X_t > 0$ $(\forall t > 0)$ *a.s.* となる。

証明にはかなり予備知識が必要なので省略する *([RY] Chp.XI §1)*。

例 4.2 確率微分方程式

$$dX_t = 2\sqrt{|X_t|}\, dB_t + \{-\beta(t)X_t + \gamma\}\, dt, \qquad X \geq 0$$

を考える。ただし、ここで $\alpha, \gamma > 0$ は定数 $\beta(t)$ は有界な正数値可測関数とする。*(*β が定数のとき、これは *CIR* モデルとなる。*)*

$$Y_t = e^{\int_0^t \beta(u)\, du} X_t$$

に対して伊藤の公式を用いると

$$dY_t = \beta(t)Y_t\, dt + e^{\int_0^t \beta(u)\, du}\, dX_t = \alpha e^{\frac{1}{2}\int_0^t \beta(u)\, du}\sqrt{|Y_t|}\, dB_t + \gamma e^{\int_0^t \beta(u)\, du}\, dt.$$

ここで、$A(t) = \frac{\alpha^2}{4}\int_0^t e^{\int_0^s \beta(u)\, du}\, ds$ とし、$\tau_t = A^{-1}(t)$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$ とおく *(*τ_t はランダムではないことに注意*)* と、$W_t = \frac{\alpha}{2}\int_0^{\tau_t} e^{\frac{1}{2}\int_0^s \beta(u)\, du}\, dB_s$ は $\langle W\rangle_t = A(\tau_t) = t$ となるので、(W_t) は $(\mathcal{G}_t)$-*Brown* 運動である。

次に $Z_t = Y_{\tau_t} = e^{\int_0^{\tau_t} \beta(u)\, du} X_{\tau_t}$ とおくと、

$$Z_t = Z_0 + 2\int_0^t \sqrt{|Z_u|}\, dW_u + \frac{4\gamma}{\alpha^2}t$$

[24] このことが書かれている日本語の文献として 松本 裕行 著 応用のための確率論・確率過程論 (臨時別冊・数理科学) サイエンス社 がある。(i), (ii) の性質の証明も少し触れている。
これ以降のことがらは 関根順 著 数理ファイナンス 培風館 から抜き出して書いている。

となる。よって、例 *4.1* により $X_t = e^{-\int_0^t \beta(u)\,du} Z_{A(t)}$ は次を満たすことがわかる。

(i) $0 < \frac{4\gamma}{\alpha^2} < 2$ のとき $X_t \geq 0$ *(*$\forall t \geq 0$*) a.s.* でほとんど確実にある時刻 t で $X_t = 0$ となるが、0 に滞在する時間は 0 となる。

(ii) $\frac{4\gamma}{\alpha^2} \geq 2$ のとき $X_t > 0$ *(*$\forall t > 0$*) a.s.* となる。

4.2 Markov 性と Feynman-Kac の公式

この節では Markov 型の確率微分方程式が Markov 性をもつことを示す。そのため、次を仮定する:

仮定 U $\alpha(t,x)$, $b(t,x)$ は $\omega \in \Omega$ にはよらないとし、$\alpha_s(t,x) = \alpha(s+t,x)$, $b_s(t,x) = b(s+t,x)$ とする。このとき、$\forall s \geq 0$ と $\forall \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ に対して、確率微分方程式

$$dX_t = \alpha_s(t, X_t)\,dB_t + b_s(t, X_t)\,dt, \qquad X_0 = \xi \tag{4.17}$$

は強解 $X_t^{(s,\xi)} = X_t^{(s,\xi)}(B)$ を一意的にもち $E[|X_t^{(s,\xi)}|^2] < \infty$ を満たす。

定理 4.1 より、α, b が (4.3), (4.12) を満たせば、仮定 U を満たす。また、定理 4.3 の場合も仮定 U を満たす。

このとき、次の Markov 性に関する定理が成立する。

定理 4.4 任意の有界可測関数 $g : W^d \to \mathbf{R}$, $s,t \geq 0$ に対して、

$$E[g(X_{s+\cdot}^{(0,s)})|\mathcal{F}_s] = E[g(X_\cdot^{(s,y)})]\Big|_{y=X_s^{(0,x)}} \qquad a.s.$$

が成立する。

証明: $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$ とおくと、 (4.2) により、

$$\begin{aligned} X_{s+t}^{(0,x)} &= x + \int_0^{s+t} \alpha(u, X_u^{(0,x)})\,dB_u + \int_0^{s+t} b(u, X_u^{(0,x)})\,du \\ &= X_s^{(0,x)} + \int_s^{s+t} \alpha(u, X_u^{(0,x)})\,dB_u + \int_s^{s+t} b(u, X_u^{(0,x)})\,du \\ &= X_s^{(0,x)} + \int_0^t \alpha(s+u, X_{s+u}^{(0,x)})\,dB_u^{(s)} + \int_0^t b(s+u, X_{s+u}^{(0,x)})\,du \end{aligned}$$

となるから、強解の一意性により $X_{s+t}^{(0,x)}(B) = X_t^{(s,X_s^{0,x})}(B^{(s)})$, $t \geq 0$, a.s. を得る。従って、

$$E[g(X_{s+\cdot}^{(0,x)})|\mathcal{F}_s] \;=\; E[g(X_\cdot^{(s,X_s^{0,x})}(B^{(s)}))|\mathcal{F}_s]$$

ここで、$B^{(s)}$ と $\mathcal{F}_s$ は独立なので、$G(x) = E[g(X_\cdot^{(s,x)})]$ とおくと、右辺は $G(X_s^{0,x})$ と表せる。従って、主張は証明された。 □

注意 4.3 *(4.17)* の解 $X_t = X_t^{(s,\xi)}$ に対して、伊藤の公式より $\forall f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ に対して、

$$M_t^f = f(t, X_t) - \int_0^t \Big(\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{L}_s\Big) f(u, X_u)\,du \tag{4.18}$$

はマルチンゲールになる。ただし、$a = (a^{ij}) = {}^t\alpha\alpha$, 即ち、$a^{ij} = \sum_{k=1}^N \alpha_k^i \alpha_k^j$ とし、

$$\mathcal{L}_s f(u,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_s^{ij}(u,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(u,x) + \sum_{j=1}^d b_s^j(u,x)\frac{\partial f}{\partial x^j}(u,x) \tag{4.19}$$

である。*Stroock-Varadhan [SV]* は各 $(s,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^d$ について、$C([0,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ 上の確率測度 $P = P_{(s,x)}$ で、$P(X_0 = x) = 1$ かつ $\forall f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ に対して *(4.18)* を P-マルチンゲールとするものが一意的に存在するとき、$\mathcal{L}_0$-マルチンゲール問題が *well-posed* であると定義し、*a, b* に対する非常に *mild* な条件の

下 $\mathcal{L}_0$-マルチンゲール問題が *well-posed* であり、その場合そこで定義される *Markov* 過程が強 *Markov* 性をもつことを証明した。また、確率微分方程式の弱解が一意的に存在すれば (強解が一意的に存在すれば弱解も一意となる)、マルチンゲール問題が *well-posed* となることが知られいるので、確率微分方程式の一意解は強 *Markov* 性をもつことがわかる。*(cf. [SV], [KS] §5.4.)*

定理 4.5 *(**Feynman-Kac の公式**)* 仮定 U が成り立っているとする。いま、偏微分方程式

$$\Big\{\partial_t u + \mathcal{L}_0 u - Vu\Big\}(x,t) = 0 \qquad (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^d \tag{4.20}$$

$$u(T,x) = f(x) \tag{4.21}$$

が解 $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbf{R}^d)$ をもつとする。ただし、$\mathcal{L}_0$ は *(4.19)* のそれである。また、$V : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ は下に有界とし、解 u は

$$E[\int_0^T |({}^t\alpha\nabla u)(t,X_t)|^2\,dt] < \infty$$

を満たすものとする。このとき、u は次のように表される*:*

$$u(t,x) = E\left[\exp\left\{-\int_0^{T-t} V(t+s, X_s^{(t,x)})\,ds\right\} f(X_{T-t}^{(t,x)})\right] \tag{4.22}$$

となる。逆に、$E[|f(X_T)|] < \infty$ とし、*(4.22)* の右辺で定義される関数を $u = u(t,x)$ とあらわす。このとき、u が $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbf{R}^d)$ を満たしているならば、u は偏微分方程式 *(4.20), (4.21)* の解になっている。

証明: $H_t = e^{-\int_0^t V(s,X_s)\,ds} u(t,X_t)$ とおく。伊藤の公式により

$$\begin{aligned}
H_t &= H_0 - \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}(Vu)(s,X_s)\,ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}\partial_{x_j}u(s,X_s)\,dX_s^j \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}\partial_s u(s,X_s)\,ds + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^d \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}\Big((\partial_{x_j x_{j'}}u)\sum_{i,i'=1}^n \alpha_i^j \alpha_{i'}^{j'}\Big)(s,X_s)\,ds \\
&= H_0 + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^n \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}(\alpha_i^j \partial_{x_j}u)(s,X_s)\,dB_s^i \\
&\qquad + \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}\Big\{\partial_s u + \mathcal{L}_0 u - Vu\Big\}(s,X_s)\,ds \\
&= H_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}({}^t\alpha\nabla u)(s,X_s)\,dB_s
\end{aligned}$$

とできるので、H_t はマルチンゲールとなる。従って、

$$e^{-\int_0^t V(\tau,X_\tau)\,d\tau}u(t,X_t) = E[H_T|\mathcal{F}_t] = E[e^{-\int_0^T V(\tau,X_\tau)\,d\tau}f(X_T)|\mathcal{F}_t],$$

即ち、$u(t,X_t) = E[e^{-\int_t^T V(\tau,X_\tau)\,d\tau}f(X_T)|\mathcal{F}_t]$ であるが、定理 4.4 により (4.22) が導かれる。

一方、$u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbf{R}^d)$ と仮定し、$\overline{H}_t = e^{-\int_0^t V(\tau,X_\tau)\,d\tau}u(t,X_t)$ すると、再び定理 4.4 より

$$\overline{H}_t = e^{-\int_0^t V(\tau,X_\tau)\,d\tau}E[e^{-\int_t^T V(\tau,X_\tau)\,d\tau}f(X_T)|\mathcal{F}_t] = E[e^{-\int_0^T V(\tau,X_\tau)\,d\tau}f(X_T)|\mathcal{F}_t]$$

と書かれ、右辺の表記より $\overline{H}_t$ がマルチンゲールであることがわかる。一方、H_t の計算と同様に伊藤の公式により、

$$\overline{H}_t = \overline{H}_\tau + \int_\tau^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}({}^t\alpha\nabla u)(s,X_s)\,dB_s + \int_\tau^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}\Big\{\partial_s u + \mathcal{L}_0 u - Vu\Big\}(s,X_s)\,ds$$

と計算されるから、

$$\int_\tau^t e^{-\int_0^s V(\tau,X_\tau)\,d\tau}\Big\{\partial_s u + \mathcal{L}_0 u - Vu\Big\}(s,X_s)\,ds = 0$$

となる。この式の両辺を $h := t - \tau$ で割って $h \downarrow 0$ とすることで、偏微分方程式 (4.20) が導かれる。 □