解析学 III （計算間違いがあるかもしれません。各自計算をチェックしてください。）

問 3.3 略解 (A で各問の行列, $\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ で固有多項式を表す。)

(1) $\Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2$, $x(t) = e^t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\right\}x_0$.

(2) 略

(3) A は対称行列だから対角化可能. $\Phi(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda-3)^2$,

$$x(t) = \left\{\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{e^{5t}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(4) $\Phi(\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda+1)$,

$$x(t) = \left\{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\1 & 0 & -2\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix} + \frac{e^{4t}}{20}\begin{pmatrix}10 & 8 & 28\\-5 & -4 & -14\\5 & 4 & 14\end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{5}\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\0 & 6 & 6\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(5) $\Phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)^2$, 部分分数展開により $1 = (\lambda-3)^2 + (-\lambda+4)(\lambda-2)$ を導き、一般化された固有空間への射影を計算すると、$(A-3I)(-A+4I)(A-2I) = O$ より、

$$x(t) = \left\{e^{2t}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\1 & 0 & -1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(6) $\Phi(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$, $\lambda_2 = i$ に対応する固有空間への射影を P_2 とすると、

$P_2 = \dfrac{1}{(i-1)(i+i)}(A-I)(A+iI) = \cdots$(各自計算せよ)$\cdots = \dfrac{1}{4}\{-(A^2-I) + i(A-I)^2\}$. (残りは略す。)

(7) $\Phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$ で、$\dfrac{1}{\Phi(\lambda)} = \dfrac{a\lambda+b}{(\lambda-1)^2} + \dfrac{c\lambda+d}{(\lambda-2)^2}$ より $1 = (2\lambda-1)(\lambda-2)^2 + (-2\lambda+5)(\lambda-1)^2$.

$$x(t) = \left[e^t\left\{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\} + e^{2t}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]x_0.$$

(8) $\Phi(\lambda) = (\lambda-1)^4$. $x(t) = e^{tI}e^{t(A-I)}x_0 = e^t\{I + t(A-I) + \dfrac{t^2}{2}(A-I)^2 + \dfrac{t^3}{6}(A-I)^3\}x_0$

$$= e^t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\-4 & -2 & 0 & 0\\6 & 1 & 1 & 1\\-14 & -5 & -1 & -1\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

問 3.4 略解 (各問を $x' = Ax + b$ で表す。)

(1) $e^{tA} = e^t\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$. $x(t) = \begin{pmatrix}-2e^t + 2e^{2t} - te^{2t}\\e^{2t} - e^t\end{pmatrix}$.

(2) $e^{tA} = e^t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & -2\end{pmatrix}\right\}$. $x(t) = \begin{pmatrix}3(e^{2t} - e^t) - 2te^t\\e^{2t} - e^t - te^t\end{pmatrix}$.

(3) $e^{tA} = e^t\cos t\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + e^t\sin t\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$. $x(t) = e^t\begin{pmatrix}0\\\sin t\end{pmatrix}$.

(4) $e^{tA} = e^t\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & -3\end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix}-3 & 6\\-2 & 4\end{pmatrix}$.

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds = \cdots = e^t\int_0^t e^{-s}\sin s\,ds\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{2}\{-\sin t - \cos t + e^t\}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$