解析学 III　(計算間違いがあるかもしれません。各自計算をチェックしてください。)

問 3.3 略解 (A で各問の行列, $\Phi(\lambda)$ で固有多項式を表す。)

(1)　$\Phi(\lambda)=(\lambda-1)^2$, $x(t)=e^t\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\right\}x_0.$

(2)　略

(3)　A は対称行列だから対角化可能. $\Phi(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda-3)^2$,

$$x(t)=\left\{\frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\frac{e^{5t}}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(4)　$\Phi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$,

$$x(t)=\left\{e^t\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}-2&1&3\\0&0&0\\-2&1&3\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(5)　$\Phi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$, $1=(-\lambda+3)(\lambda-1)+(\lambda-2)^2$ に注意し一般化された固有空間への射影を計算すると、$(A-2I)(-A+3I)(A-I)=O$ より、

$$x(t)=\left\{e^{2t}\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&3&1\\2&-4&-1\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&-2&-1\\-2&4&2\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(6)　$\Phi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$, $\lambda_2=i$ に対応する固有空間への射影を P_2 とすると、

$P_2=\dfrac{1}{(i-1)(i+i)}(A-I)(A+iI)=\cdots$(各自計算せよ)$\cdots=\dfrac{1}{4}\{-(A^2-I)+i(A-I)^2\}$. (残りは略す。)

(7)　$\Phi(\lambda)=(\lambda-4)^4$.　$x(t)=e^{4tI}e^{t(A-4I)}x_0=e^{4t}\{I+t(A-4I)+\dfrac{t^2}{2}(A-4I)^2+\dfrac{t^3}{6}(A-4I)^3\}x_0$

$$=e^{4t}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2&0&-4&-4\\0&0&2&3\\2&0&4&4\\-1&0&-2&-2\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}x_0.$$

(8)　$\Phi(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-2)$ で、$\dfrac{1}{\Phi(\lambda)}=\dfrac{a\lambda^2+b\lambda+c}{(\lambda-1)^3}+\dfrac{d}{\lambda-2}$ より $1=\{1-(\lambda-1)^3\}+(\lambda-1)^3$.

$$x(t)=\left[e^t\left\{\begin{pmatrix}2&1&0&2\\0&1&0&0\\-1&-1&1&-2\\-1&-1&0&-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&0&-1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}+e^{2t}\begin{pmatrix}-1&-1&0&-2\\0&0&0&0\\1&1&0&2\\1&1&0&2\end{pmatrix}\right]x_0.$$

問 3.4 略解 (各問を $x'=Ax+b$ で表す。)

(1)　$e^{tA}=e^t\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$.　$x(t)=\begin{pmatrix}3(e^{2t}-e^t)-t(e^t+e^{2t})\\4(e^{2t}-e^t)-t(2e^t+e^{2t})\end{pmatrix}$.

(2)　$e^{tA}=e^{3t}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.　$x(t)=e^{3t}\left\{t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(3)　$e^{tA}=e^t\cos t\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+e^t\sin t\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.　$x(t)=te^t\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$.

(4)　$e^{tA}=e^t\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-6&9\\-4&6\end{pmatrix}\right\}$.

$$x(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds=\cdots=e^t\int_0^t e^{-s}\sin s\,ds\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\cdots=\frac{1}{2}\{-\sin t-\cos t+e^t\}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$