確率統計学 II　　演習問題　2009 年 11 月 11 日[1]

参考文献 (洋書からの引用の場合略す)

[AEL] 浅野, 江島, 李 共著 基本統計学 森北出版

[F] 舟木著 確率論 朝倉書店

[GW] Grimmett, Welsh 共著 確率論入門 日本評論社 (藤曲 監訳, 大西 訳)

[K] 小寺平治 著 「明解演習 数理統計」 共立出版

4.2 特性関数と分布 [8]

教科書 [AEL] p.85 の [問 5], [問 6] も解いておくこと。

13. $f(M) = \int_0^M \frac{\sin t}{t}\,dt$ は $\sup_{M>0} |f(M)| < \infty$ を満たすことを示せ。また、$\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty$ を示せ。

14. 問 **13** の $f(M)$ について、以下のように Fubini の定理を用いて $\lim_{M\to\infty} f(M) = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(1) $M > 0$ とする。$\int_0^M \int_0^\infty \left|e^{-ut}\sin t\right| du\,dt < \infty$ を示せ。

(2) (1) より Fubini の定理を用いて、$f(M) = \int_0^\infty \frac{\varphi_M(u)}{1+u^2}\,du$ を満たす $\varphi_M(u)$ を求めよ。

(3) $|\varphi_M(u)| \le 3$, $\lim_{M\to\infty} \varphi_M(T) = 1$ を示せ。更に、Lebesgue の優収束定理を用いて、$\lim_{M\to\infty} f(M) = \frac{\pi}{2}$ を導け。

15. [GW, p.134] $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ特性関数 $\phi(t)$ を持つ独立な確率変数であるとする。このとき、$Y_n = a_n + b_n(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ の特性関数を求めよ。ただし、a_n, b_n は実数である。

次に $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ $(0 < \alpha \le 2)$ であると仮定する。Y_n が $n = 1, 2, \cdots$ に対して X_1 と同じ分布になるように a_n と b_n を決定せよ。また、$\alpha = 1$ と $\alpha = 2$ のそれぞれの場合について X_1 の密度関数を求めよ。

16. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2} 1_{(0,\infty)}(x)$ とし、$-1 \le a \le 1$ に対して、$f_a(x) = (1 + a\sin(2\pi \log x))f(x)$ とする。

(1) $f_a(x)$ が密度関数となることを示せ。

(2) $f_a(x)$ を密度関数とする確率変数を X_a とするとき、$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して、$E[|X_a|^n] < \infty$ を示し、$E[{X_a}^n]$ が $-1 \le a \le 1$ によらないことを確かめよ。

---

[1] **間違いがあるかもしれません。もし見つけたら杉浦までお知らせください。**

[8] **略解: 13** 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt$ が条件収束することを示せばよい。(必要なら微分積分の教科書見て各自証明せよ。)

14 (1) 与式 $\le \int_0^M \frac{|\sin u|}{u}\,du < \infty$. (2) $\int_0^\infty e^{ut}\,du = \frac{1}{t}$ に注意し、(1) より Fubini の定理が使えて、$f(M) = \int_0^\infty \int_0^M e^{-ut}\sin t\,dt\,du$ で、$\varphi_M(u) = 1 - e^{-Mu}\cos M - ue^{-Mu}\sin M$ として成り立つ。(3) $|ue^{-Mu}\sin M| \le |\frac{Mu}{e^{Mu}}\frac{\sin M}{M}| \le 1$ に注意すれば $|\varphi_M(u)| \le 3$ は容易。$\lim_{M\to\infty}\varphi_M(T) = 1$ も容易。$\left|\frac{\varphi_M(u)}{1+u^2}\right| \le \frac{3}{1+u^2}$ で $\int_0^\infty \frac{3}{1+u^2}\,du < \infty$ となるから、Lebesgue の優収束定理が使えて、$\lim_{M\to\infty} f(M) = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ を得る。

15 (1) $\phi_{Y_n}(t) = E[e^{ita_n}e^{itb_n(X_1+\cdots+X_n)}] = e^{ita_n}E[e^{itb_nX_1}\cdots e^{itb_nX_n}] = e^{ita_n}E[e^{itb_nX_1}]\cdots E[e^{itb_nX_n}] = e^{ita_n}\{\phi(b_nt)\}^n$.
(2) $e^{-|t|^\alpha} = e^{ita_n}e^{-n|b_nt|^\alpha}$ より、$a_n = 0$, $b_n = n^{-1/\alpha}$.

16 (1) $f_a(x) \ge 0$ は明らか。$\int_{\mathbf{R}} f_a(x)\,dx = \int_0^\infty (1 + a\sin(2\pi\log x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1 + a\sin(2\pi t)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 1.$ ここで $x = e^t$ と置換積分し、$\sin(2\pi t)e^{-\frac{1}{2}t^2}$ が奇関数であることを用いた。(2) $X \ge 0$ より、$E[X^n] = E[|X|^n] = \int_0^\infty x^n \frac{1 + a\sin(2\pi\log x)}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{nt}\frac{1 + a\sin(2\pi t)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1 + a\sin(2\pi(t-n))}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(t-n)^2+\frac{1}{2}n^2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1 + a\sin(2\pi s)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}n^2}\,ds = e^{\frac{1}{2}n^2}.$ ここで、$\sin(2\pi(s+n)) = \sin(2\pi s)$ と $\sin(2\pi t)e^{-\frac{1}{2}t^2}$ が奇関数であることを用いた。

17 X_1, X_2 は X と同じ分布をもつ独立な確率変数とする。(a) $-X$, (b) $X_1 + X_2$, (c) $X_1 - X_2$, (d) $f_Y(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\}$ なる確率変数 Y　($\mathrm{Re}\,a = \frac{1}{2}(a + \overline{a})$ に注意のこと)

注意　この例より、$E[X^n] = E[Y^n]$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) であっても、$\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ とは限らない (即ち、分布が一致するとは限らない) ことがわかる。

17. $\phi(t)$ が確率密度関数 $f(x)$ をもつ確率変数 X の特性関数であるとする。次の (a)–(d) がどのような確率変数の特性関数か調べよ。

(a) $\overline{\phi(t)}$　　(b) $\phi(t)^2$　　(c) $|\phi(t)|^2$　　(d) $\mathrm{Re}\,\phi(t)$

4.3 法則収束と弱収束,　4.4 特性関数と法則収束 [9]

18. 確率変数 X_n を $P(X_n = k) = 1/n$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) なる確率変数とする。このとき、$\dfrac{1}{n}X_n$ が $(0,1)$ 上の一様分布に法則収束することを、(a) 分布関数の極限をとる方法, (b) 特性関数を用いる方法 で示せ。

19. X_n はその密度関数が $f_{X_n}(x) = 1 - \cos(2\pi nx)$ $(0 < x < 1)$, $= 0$ (その他) で与えられる確率変数とする。このとき、X_n は $(0,1)$ 上の一様分布に法則収束するが、$0 < \forall x < 1$ に対して $f_n(x)$ は収束しないことを確認せよ。

4.5 中心極限定理 [10]

教科書 [AEL] p.86 の [問 9], [問 10] も解いておくこと。

20. [K, p.96] 中心極限定理を用いて以下の問いに答えよ。ただし、必要に応じて教科書 [AEL] p.257 の付表を用いよ。((2) は $u = \displaystyle\int_{Q(u)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ で定まる $Q(u)$ を線形補間し、小数第 4 位まで求めよ。)

(1) サイコロを 180 回投げて、1 の目が出る回数が 28 回以上、34 回以下である確率を求めよ。

(2) 硬貨を 500 回投げたとき、表が 220〜270 回出る確率を求めよ。

(3) サイコロを 900 回投げたとき、1 の目が $150 - k \sim 150 + k$ 回出る確率が 0.9 以上であるためには k はほぼいくら以上でなければならないか。ただし、$Q(1.645) = 0.05$ を用いよ。

(4) 大手予備校の模試で、数学の成績を 10 点きざみの度数分布表に整理して平均点を計算する。平均点の誤差が 0.1 点以内におさまる確率が 0.95 以上にしたい。何名以上の受験者が必要か。ただし、$Q(1.96) = 0.025$ を用いよ。

---

[9] **略解: 18** (a) $y < 0$ のとき $P(\frac{1}{n}X_n < y) = 0 \to 0$, $y > 1$ のとき $P(\frac{1}{n}X_n < y) = 1 \to 1$ $0 < y < 1$ のとき、$P(\frac{1}{n}X_n < y) = \frac{\lceil ny \rceil - 1}{n} \to y$ $(n \to \infty)$ より成立。(最後の極限の部分は各自示せ。) ここで、$\lceil a \rceil$ は天井関数、すなわち、a 以上の最小の整数を表す。例えば $\lceil 1.5 \rceil = 2$.　(b) $E[e^{it\frac{1}{n}X_n}] = \sum_{k=1}^{n} e^{it\frac{k}{n}} \frac{1}{n} \to \int_0^1 e^{itx}\,dx$ となるので、成立する。
19 $0 < y < 1$ のとき、$P(X_n < y) = y - \frac{\sin(2\pi ny)}{2\pi n} \to y$ より、法則収束することは **18** と同様に示せる。$f_{X_n}(x)$ が収束しないことは、$0 < \forall x < 1$ に対して $\{\cos(2\pi ny)\}$ が $n \to \infty$ のとき振動することによる。(各自証明せよ。)

[10] **略解: 20** [半整数補正を忘れないこと!] (注意: 近似値も「=」で表してます。)
(1) X は二項分布 $B(180, \frac{1}{6})$ に従うから、$E[X] = 30$, $V(X) = 25$. よって、$Z = \frac{X-30}{\sqrt{25}}$ が $N(0,1)$ に従うと考えられるから、求める確率は $P(28 \le X \le 34) = P(27.5 \le X \le 34.5) = P(\frac{27.5-30}{5} \le Z \le \frac{34.5-30}{5}) = P(-0.5 \le Z \le 0.9) = 1 - Q(0.5) - Q(0.9) = 0.5075$.
(2) X は二項分布 $B(500, \frac{1}{2})$ に従うから、$E[X] = 250$, $V(X) = 125$. よって、$Z = \frac{X-250}{\sqrt{125}}$ が $N(0,1)$ に従うと考えられるから、求める確率は $P(219.5 \le X \le 270.5) = P(\frac{219.5-250}{\sqrt{125}} \le Z \le \frac{270.5-250}{\sqrt{125}}) = P(-2.7280 \le Z \le 1.8336) = 1 - Q(2.7280) - Q(1.8336) = 0.96346$ より 0.9635. ここで、線形補間 $Q(2.7280) = Q(2.72) + (Q(2.73) - Q(2.72))\frac{2.7280-2.72}{2.73-2.72} = 0.003186$, $Q(1.8336) = Q(1.83) + (Q(1.84) - Q(1.83))\frac{1.8336-1.83}{1.84-1.83} = 0.033354$ を用いた。
(3) X は二項分布 $B(900, \frac{1}{6})$ に従うから、$E[X] = 150$, $V(X) = 125$. よって、$Z = \frac{X-150}{\sqrt{125}}$ が $N(0,1)$ に従うと考えられるから、
$P(149.5 - k \le X \le 150.5 + k) = P(-\frac{k+0.5}{\sqrt{125}} \le Z \le \frac{k+0.5}{\sqrt{125}}) = 1 - 2P\left(Z > \frac{k+0.5}{\sqrt{125}}\right) = 0.9$ より $\frac{k+0.5}{\sqrt{125}} \ge 1.645$ ならばより。これより、$k \ge 17.89166$ となるので、18 以上.
(4) $\{X_n\}$ は独立同分布で、各 X_k は一様分布 $U(-5,5)$ に従うとすると、平均点の誤差は $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ とあらわせる。ここで、$E[X_1] = 0$, $V(X_1) = \frac{10^2}{12}$ であるから、中心極限定理により、$Z = \frac{nY_n}{\sqrt{n\frac{10^2}{12}}}$ が $N(0,1)$ に従うと考えられる。$0.95 = P(|Y_n| < 0.1) = P(|Z| < \frac{0.1n}{\sqrt{n\frac{10^2}{12}}})$ より、$\frac{0.1n}{\sqrt{n\frac{10^2}{12}}} \ge 1.96$. これより、$n \ge \left(\frac{1.96}{0.1}\sqrt{\frac{10^2}{12}}\right)^2 = 3201.3$ となるので、3202 人以上必要である。