確率統計学 II　　演習問題　2009 年 10 月 21 日[1]

参考文献

[AEL] 浅野, 江島, 李 共著 基本統計学 森北出版

[F] 舟木著 確率論 朝倉書店

[GW] Grimmett, Welsh 共著 確率論入門 日本評論社 (藤曲 監訳, 大西 訳)

3.1 確率変数の極限 [2]

1. (1) a, b を定数とする。$X_n \to X$ in prob. (確率収束するの意) のとき、$aX_n + b \to aX + b$ in prob. を示せ。(注意: 問 **1** (1), (2) は問 **3** を用いず定義から示せ。)

(2) $X_n \to X$ in prob. かつ $Y_n \to Y$ in prob. のとき、$X_n + Y_n \to X + Y$ in prob. を示せ。

(3) [GW, p.147] $a > 0$ する。確率変数列 $\{X_n\}$ が独立で一様分布 $U(0, a)$ に従うとき、$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ とおく。$\{Y_n\}$ は a に確率収束することを示せ。

(4) [GW, p.140] 公正なサイコロを n 回投げるとき、6 の目の出る回数が $\frac{1}{6}n - \sqrt{n}$ と $\frac{1}{6}n + \sqrt{n}$ の間にある確率は、$\frac{31}{36}$ 以上であることを示せ。

2. $1 \leq q < r$ とする。 (1) 確率変数列が r 次平均収束すれば、q 次平均収束することを示せ。

(2) $X_n \to X$ in L^r (r 次平均収束するの意) かつ $Y_n \to Y$ in L^r のとき、$X_n + Y_n \to X + Y$ in L^r を示せ。

(3) $X_n \to X$ in L^2 かつ $E[X_n] = \mu, V(X_n) = \sigma^2$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) のとき、(a) $E[X] = \mu$, (b) $V(X) = \sigma^2$, (c) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}(X_n, X) = \sigma^2$ を示せ。

3. (1) $r \geq 1$ とする。r 次平均収束する (従って確率収束する) が概収束しない確率変数列を例示し、それが実際に r 次平均収束するが概収束しないことを示せ。

(2) 概収束する (従って確率収束する) が、r 次平均収束しない確率変数列を例示し、それが実際に概収束するが r 次平均収束しないことを示せ。

4. [F, p.72] (1) 確率変数 X, Y に対して $d(X,Y) = E\left[\dfrac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right]$ とおけば、距離の公理を満たし、$d(X_n, X)$ と $X_n \to X$ in prob. が同値になることを示せ。ただし、$X = Y$ a.s. のとき X と Y を同一視するものとする。

---

[1] **間違いがあるかもしれません。もし見つけたら杉浦までお知らせください。**

[2] **略解: 1** $\varepsilon > 0$ とする。(1) $a = 0$ のときは自明。$a \neq 0$ のとき、$P(|(aX_n + b) - (aX + b)| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X| \geq \varepsilon/|a|) \to 0$.
(2) $x + y \geq \varepsilon \Rightarrow x \geq \frac{\varepsilon}{2}$ or $y \geq \frac{\varepsilon}{2}$ を示し、$P(|X_n + Y_n - (X+Y)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2})$ を導け。
(3) $P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq a - \varepsilon) = P(X_n \leq a - \varepsilon)^n = \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n \to 0$. ($\varepsilon < a$ とした。3 つ目の等号は独立性による。)
(4) 6 の目の回数を X とすると X は $B(n, \frac{1}{6})$ に従うから、Chebyshev の不等式より、$P(|X - \frac{1}{6}n| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{1}{n}E[(X - \frac{1}{6}n)^2] = \frac{5}{36}$.
2 (1) Hölder の不等式 ([AEL] p.58) を用いよ。(2) Minkovsky の不等式 ([AEL] p.58) を用いよ。
(3) (a): $|E[X] - \mu| \leq |E[X] - E[X_n]| \leq E[|X - X_n|] \to 0$ ((1) を $r = 2, q = 1$ として用いた).
(b): $\|X\|_2 = E[|X|^2]^{1/2}$ とすると Minkovsky の不等式により $\|X + Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2$. このとき、$\|X_n - \mu\|_2 - \|X_n - X\|_2 \leq \|X - \mu\| \leq \|X_n - \mu\|_2 + \|X_n - X\|_2$ で仮定より $\|X_n - \mu\|_2{}^2 = V(X) = \sigma^2$, $\|X_n - X\|_2 \to 0$ であるから、主張を得る。
(c): $|\mathrm{Cov}(X_n, X) - \sigma^2| = |E[(X_n - \mu)(X - \mu)] - E[(X - \mu)^2]| = |E[(X_n - X)(X - \mu)]| \leq E[|X_n - X|^2]^{1/2}E[|X - \mu|^2]^{1/2} \to 0$ (Schwarz の不等式を用いた) より、$\mathrm{Cov}(X_n, X) \to \sigma^2$.
3 (1) $X_{n,k}(\omega) = 1_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(\omega)$ とし、$X_1 = X_{1,1}$, $X_2 = X_{2,1}$, $X_3 = X_{2,2}$, $\ldots$, $X_{(1+2+\cdots+n-1)+k-1} = X_{n,k}$, $\ldots$, と $\{X_n\}$ を定めると、$\omega \in [0, 1)$ に対して、$X_{n,k}(\omega) = 1$ ($k = [n\omega]$), $= 0$ ($k \neq [n\omega]$) となるから、$\{X_n(\omega)\}$ は収束しない。よって、$\{X_n\}$ は概収束しない。一方、$E[|X_{n,k} - 0|^r] = \frac{1}{n}$ だから、r 次平均収束する。
(2) $X_n = n1_{[0, \frac{1}{n})}$ とおくと、$\forall \omega \in (0, 1)$ に対して、$n \geq \frac{1}{\omega}$ とすれば $X_n(\omega) = 0$ なので、$\{X_n(\omega)\}$ は収束する。よって、$\{X_n\}$ は概収束する。一方、$E[|X_n - 0|^r] = n^r \cdot \frac{1}{n}$ となり r 次平均収束しない。
4 (1) 距離付け可能であること。$d(X, Y) \geq 0$, $d(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ は略。三角不等式は $\psi(x) = \frac{x}{1+x}$ とすると、$\psi(x)$ は $x \geq 0$ で単調増加で $\psi(x + y) \leq \psi(x) + \psi(y)$, $x, y \geq 0$, となることを示せばよい。詳しい証明は略す。
同値性: $\forall \varepsilon > 0$ とする。($\Rightarrow$) $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\psi(\varepsilon)}E[\psi(|X_n - X|)]$ を用いればよい。この不等式は Chebyshev の不等式と同様に示せる (証明は各自試みよ)。($\Leftarrow$) $Y_n = |X_n - X|$ とおき、$\psi(x) \leq 1$, $\psi(\varepsilon) \leq \varepsilon$ に注意すれば、$d(X_n, X) = E[\psi(Y_n)1_{\{Y_n > \varepsilon\}}] + E[\psi(Y_n)1_{\{Y_n \leq \varepsilon\}}] \leq P(Y_n \leq \varepsilon) + \varepsilon$ となる。$X_n \to X$ in prob. とすると、$\limsup_{n\to\infty} d(X_n, X) \leq \varepsilon$ となるが、$\varepsilon > 0$ は任意だから $\limsup_{n\to\infty} d(X_n, X) \leq 0$ となり、左辺は非負だから $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$ を得る。

(2) 確率変数列に対する概収束は距離付け不可能であることを示せ。

3.2 大数の弱法則 [3]

5. 確率変数列 $\{X_n\}$ について、各確率変数 X_k の分散 $V(X_k)$ が存在するとする。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} V\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big) = 0$ が成立する (Markov 条件という) とき、大数の弱法則が成り立つことを示せ。また、[AEL] p.86 [問 7], [問 8] を解け。

(2) ある数列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ が存在して、$|\operatorname{Cov}(X_k, X_l)| \leq a_{|k-l|}$ $(\forall k, l \in \mathbf{N})$ とする。もし $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$ を満たせば、$\{X_n\}$ は Markov 条件を満たすことを示せ。

6. (**Bernstein の多項式近似定理**) 互いに独立で成功率 p の Bernoulli 試行列 $X_1, X_2, \dots$ を考える: $P(X_n = 1) = p, P(X_n = 0) = 1 - p$. $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ とおく。以下のように、任意の $[0,1]$ 上の連続関数 $f \in C[0,1]$ が多項式によって一様収束の位相で近似できることを示せ。

(1) $E[f(Y_n)] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ を示せ。この右辺を Bernstein 多項式といい、$B_n f(p)$ と表す。

(2) $\delta > 0$ とする。Chebyshev の不等式を用いて、$P(|Y_n - p| \geq \delta) \leq \dfrac{p(1-p)}{\delta^2 n}$ となることを示せ。

(3) $|B_n f(p) - f(p)| \leq E[|f(Y_n) - f(p)|] \leq u_f(\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}$ を示せ。
ただし、$u_f(\delta) = \sup\limits_{x,y\in[0,1]:|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ とする。

(4) (3) を用いて、$\lim\limits_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$ を示せ。

3.3 大数の強法則 [4]

7. $\{X_n\}$ を独立で同分布をもつ確率変数列で、$E[{X_n}^4] < \infty$ とする。このとき、大数の強法則が成立することを以下にしたがって示せ。ただし、簡単のため $E[X_1] = 0$ とする。

(1) $m_k = E[{X_1}^k]$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ とするとき、$E[\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big)^4] = nm_4 + 3n(n-1){m_2}^2$ を示せ。

(2) $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ とし、$A_n = \left\{|Y_n| \geq \dfrac{1}{n^{1/8}}\right\}$ とおくと、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ となることを示せ。

(3) $\{Y_n\}$ が 0 に概収束することを示せ。

---

[3] **略解: 4** (2) もし、確率変数列に対する概収束が距離付け可能であれば、$X_n \to X$ a.s. と「$\{X_n\}$ の任意の部分列 $\{X_{n'}\}$ が X に概収束する部分列 $\{X_{n''}\}$ をもつ」が同値であることに注意する (これは距離空間の一般的な性質です。各自証明を試みよ。)。今、$X_n \to X$ in prob. とすればこの $\{X_n\}$ は後者の性質を持つ (定理 3.6)。よって、確率収束すれば概収束することとなるが、これは矛盾である (問 **1** (2))。
5 (1) [AEL] p.79 などを見よ。(2) $\tilde{X}_k = X_k - E[X_k]$ とかく。$V\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big) = E[\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{X}_k\Big)^2] = \sum\limits_{k=1}^{n} E[\tilde{X}_k^2] + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{k-1} E[\tilde{X}_k \tilde{X}_l] \leq na_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{k-1} a_{k-l} = na_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{k-1} a_m = na_0 + 2\sum\limits_{m=1}^{n-1} a_m \sum\limits_{k=m+1}^{n} 1 = na_0 + 2\sum\limits_{m=1}^{n-1} (n-m-1)a_m \leq na_0 + 2n\sum\limits_{m=1}^{n-1} a_m$ より成立。
6 (1) nY_n が二項分布 $B(n,p)$ に従うことを用いよ。(2) 左辺 $\leq \frac{1}{\delta^2} E[|Y_n - p|^2] = \frac{1}{n^2\delta^2} V(nY_n) =$ 右辺 ($\because$ nY_n が $B(n,p)$ に従う).
(3) $E[|f(Y_n) - f(p)|] = E[|f(Y_n) - f(p)| 1_{\{|Y_n - p| < \delta\}}] + E[|f(Y_n) - f(p)| 1_{\{|Y_n - p| \geq \delta\}}] \leq u_f(\delta) P(|Y_n - p| < \delta) + 2\|f\|_\infty P(|Y_n - p| \geq \delta) \leq u_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}$. 最後の不等号は (2) と $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ を用いた。
(4) (3) は任意の $p \in [0,1]$ に対して成立するので、$\|B_n f - f\|_\infty \leq u_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}$. よって、$\limsup\limits_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty \leq u_f(\delta)$. ここで、左辺は非負であり $\delta > 0$ に依存しないから $\delta \to +0$ として ($u_\delta(f) \to 0$ となるので)、$\limsup\limits_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$, 即ち、$\lim\limits_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$.

[4] **略解: 7** (1) $E[X_i X_j X_k X_l]$ の i, j, k, l のうちいくつ等しいかで場合分けすることで (例えば $E[X_1 X_1 X_1 X_2] = E[X_1^3] E[X_2] = m_3 m_1$)、$E[(\sum_{k=1}^n X_k)^4] = nm_4 + 4n(n-1)m_3 m_1 + 3n(n-1){m_2}^2 + 6n(n-1)(n-2)m_2 {m_1}^2 + n(n-1)(n-2)(n-3){m_1}^4$ となるが、$m_1 = 0$ より与式を得る。(2) Chebyshev の不等式により $P(A_n) \leq \frac{1}{(n^{-1/8})^4} E[|Y_n|^4] = \frac{nm_4 + 3n(n-1)m_2}{n^{7/2}} \leq \frac{c}{n^{3/2}}$ となる定数 c がある。よって、$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^{3/2}} \leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$ より主張を得る。(3) Borel-Cantelli の定理 ([ARL] p.12 定理 1.3(i)) により、$P\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$. 即ち、$P\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} {A_k}^{\mathrm{c}}\Big) = 1$. $\omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} {A_k}^{\mathrm{c}}$ とすると、$\exists n \in \mathbf{N}$ s.t. $k \geq n \Rightarrow |Y_n(\omega)| < \frac{1}{n^{1/8}}$. これは、$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0$ を意味する。

8. $\{X_n\}$ を独立で同分布をもつ確率変数列で、$E[|X_n|]=\infty$ とする。このとき、$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ に対して、$P\Big(\limsup\limits_{n\to\infty}|Y_n|=\infty\Big)=1$ となることを以下にしたがって示せ。[5]

(1) $M>0$ とする。$B_n=\{|X_n|\ge Mn\}$ とおくと、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(B_n)=\infty$ となることを示せ。

(2) Borel-Cantelli の第 2 定理 ([ARL] p.12 定理 1.3(ii)) を用いて、$P\Big(\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|X_n|}{n}\ge M\Big)=1$ を示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して、$\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{n}=\infty$ ならば、$\limsup\limits_{n\to\infty}\Big|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big|=\infty$ となることを示せ。これより、$\Big\{\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|X_n|}{n}=\infty\Big\}\subset\Big\{\limsup\limits_{n\to\infty}|Y_n|=\infty\Big\}$ であるが、(2) で $M\to\infty$ として、$P\Big(\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|X_n|}{n}=\infty\Big)=1$ となるから、証明は完了する。

4.1 特性関数 [6]

[AEL] p.85 の [問 1], [問 2], [問 4] も解いておくこと。

9. X が指数分布 $Ex(\lambda)$ $(\lambda>0)$ に従う、即ち、その密度関数が $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$ であるとき、その特性関数 $\phi_X(t)=E[e^{itX}]$ を (1) 実部虚部を分けて計算する方法, (2) Cauchy の積分定理を用いる方法 のそれぞれで求めよ。

10. 確率変数 X が $E[|X|^k]<\infty$ を満たせば、その特性関数 $\phi_X(t)$ は C^k-級で $\phi_X^{(k)}(t)=i^kE[X^ke^{itX}]$ となることを示せ。

11. ある確率変数 X の特性関数が $\phi_X(t)=e^{-|t|^\alpha}$ であるとする。このとき、$E[|X|^2]<\infty$ ならば $\alpha=2$ となることを示せ。

12. $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_p)'$ を p 次元正規分布 $N(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$ に従うとする。このとき、正則行列 B に対して、$\boldsymbol{Y}=(Y_1,\dots,Y_p)'=B(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m})$ とすると、$\boldsymbol{Y}$ が $N((0,\dots,0)',B\boldsymbol{\Sigma}B')$ に従うことを示せ。

---

[5] **略解: 8** (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(B_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\ge Mn)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}P(Mk\le|X_1|<M(k+1))=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}P(Mk\le|X_1|<M(k+1))=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kP\big(k-1\le\frac{|X_1|}{M}-1<k\big)\ge\sum\limits_{k=1}^{\infty}E\big[\big(\frac{|X_1|}{M}-1\big)1_{\{k-1\le\frac{|X_1|}{M}-1<k\}}\big]=E\big[\big(\frac{|X_1|}{M}-1\big)\big]=\infty.$
(2) (1) に Borel-Cantelli の第 2 定理を適用すると $P\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}B_k\Big)=1$. $\omega\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}B_k$ とすると、$\forall n\in\mathbf{N}\ \exists k\ge n$ s.t. $|X_k(\omega)|\ge Mk$. これは、$\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{|X_n(\omega)|}{n}\ge M$ を意味する。(3) $|a_n|=|(a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+\cdots+a_{n-1})|\le|a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n|+|a_1+\cdots+a_{n-1}|$ に注意する。これより、もし $\limsup\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big|<\infty$ ならば、$\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n}<\infty$ となり、対偶が示せた。

[6] **略解: 9** (1) $\phi_X(t)=\int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos tx\,dx+i\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin tx\,dx=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}+i\frac{\lambda t}{\lambda^2+t^2}=\frac{\lambda}{\lambda-it}$.
(2) $c=\lambda-it$ とおく。$R>0$ とし、C_R を $C_{R,1}$: 実軸上を $0\to R$, $C_{R,2}$: $|z|=R$ 上を $R\to\frac{c}{|c|}R$, $C_{R,3}$: $\arg z=\frac{c}{|c|}$ 上を $\frac{c}{|c|}R\to 0$, からなる閉曲線とする。 $R\to\infty$ のとき、$\int_{C_{R,1}}e^{-|c|z}dz=\int_0^R e^{-|c|x}\,dx\to\frac{1}{|c|}$, $|\int_{C_{R,2}}e^{-|c|z}dz|=|\int_0^{\arg c}e^{-|c|Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}\,d\theta|=\int_0^{|\arg c|}Re^{-R\cos\theta}\,d\theta\le|\arg c|Re^{-R\frac{\lambda}{|c|}}\to 0$ ($\cos\arg c=\mathrm{Re}\,\frac{c}{|c|}=\frac{\lambda}{|c|}>0$ に注意), $\int_{C_{R,3}}e^{-|c|z}dz=\int_R^0 e^{-ct}\frac{c}{|c|}\,dt\to\frac{-c}{|c|}\int_0^\infty e^{-ct}\,dt$. よって、Cauchy の積分公式により、$\int_{C_R}e^{-|c|z}dz=0$ であるから、$\int_0^\infty e^{-cx}\,dx=\frac{1}{c}=\frac{1}{\lambda-it}$. よって、$\phi_X(t)=\lambda\int_0^\infty e^{-cx}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda-it}$.
10 $k=1$ のときは、平均値の定理により $e^{i(t+h)x}-e^{itx}=ixe^{i(t+\theta h)x}h$ $(0<\theta<1)$ とできるから、$\big|\frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h}\big|\le|X|$ となる。よって、Lebesgue の優収束定理から、$\lim\limits_{h\to0}\frac{\phi_X(t+h)-\phi_X(t)}{h}=E[Xe^{itX}]$ となり、微分可能であることがわかる。また、$\phi_X'(t)=E[Xe^{itX}]$ が連続であることは、命題 4.4 (iv) と同様に示すことができる。$k-1$ のとき成り立つとすると、同様にして k のときも示せる。各自試みよ。
11 $\phi_X(t)$ は $\alpha>1$ のときのみ C^1-級で $\phi_X'(t)=-\alpha|t|^{\alpha-2}te^{-|t|^\alpha}$, $\alpha\ge2$ のときのみ C^2-級で $\phi_X''(t)=-\alpha(\alpha-1)|t|^{\alpha-2}e^{-|t|^\alpha}+(\alpha|t|^{\alpha-2}t)^2e^{-|t|^\alpha}$. 仮定より、問 **10** から $\phi_X(t)$ は C^2-級だから $\alpha\ge2$. もし $\alpha>2$ なら、$E[X^2]=-\phi_X''(0)=0$ となり、$X=0$ a.s. このとき、$\phi_X(t)=1$ だから矛盾する。注意: $0<\alpha<2$ のとき、$e^{-|t|^\alpha}$ を特性関数とする確率分布が存在することが知られている。(*cf.* Durrett 著 Probability: Theory and Examples, Second Ed. Duxbury Press, p.106 Example 3.10)
12 $\boldsymbol{x}=B^{-1}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{m}$ より、$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})=f_{\boldsymbol{X}}(B^{-1}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{m})\big|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{y}}\big|=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}(\det\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}}\exp\big\{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{y})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}B^{-1}\boldsymbol{y}\big\}|\det B^{-1}|=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}(\det B\boldsymbol{\Sigma}B')^{1/2}}\exp\big\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'(B\boldsymbol{\Sigma}B')^{-1}\boldsymbol{y}\big\}$. $(\det\boldsymbol{\Sigma})|\det B^{-1}|^{-2}=(\det\boldsymbol{\Sigma})(\det B)^2=\det B\boldsymbol{\Sigma}B'$ に注意のこと。