数学演習問題[1]　　2008 年 10 月 27 日

問題 1 $AR(2)$ モデル $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ が定常であるとして、その $MA(\infty)$ 表現 ($Y_t = \xi_0 + \varepsilon_t + \xi_1\varepsilon_{t-1} + \cdots$) を考える。

□ (1) $\phi_0 = 0$ のとき、特性方程式 $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$ の根を a, b とし、$\alpha = 1/a, \beta = 1/b$ とおく。このとき、$\alpha \neq \beta$ であれば $\xi_j = \frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^{j+1} - \alpha^{j+1})$ ($j = 1, 2, \ldots$) であり、また、$\alpha = \beta$ であれば $\xi_j = (j+1)\alpha^j$ ($j = 1, 2, \ldots$) となることを示せ。
ヒント: $Y_t - \alpha Y_{t-1} = \beta(Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + \varepsilon_t$ となることを用いよ。また、定常性より $\alpha^j, \beta^j \to 0$ ($j \to \infty$) に注意せよ。また、α, β が複素数でも ξ_j は実数であることにも注意せよ。

□ (2) $\phi_0 \neq 0$ の場合を考えよ。　　(ヒント: $Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$ と変形せよ。)

□ (3) $AR(2)$ モデル $Y_t = 2.0 + 0.5Y_{t-1} + 0.1Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ($E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = 0.6$) の $MA(\infty)$ 表現をを教科書の方法と上記の方法で求めよ。　(モデリング 問題 2.10)

□ (4) (3) のモデルについて、時刻 t までの時系列データが与えられているときの Y_{t+3}, Y_{t+4} の分散を求めよ。

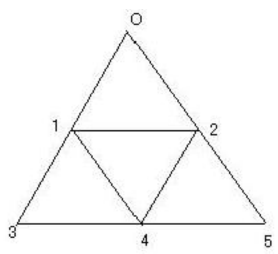
問題 2 $AR(1)$ モデル $Y_t - 4 = 0.8(Y_{t-1} - 4) + \varepsilon_t$ ($E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = 7$) について、時系列データ $\{y_t\}_{t=1}^5$ が下表のとおり与えられている時、Y_t, $t = 6, 7$, を予測せよ。

t	1	2	3	4	5
y_t	5.9	4.9	2.2	2.0	4.9

([F, p.104], *cf*. モデリング p.2-16)

また、上の時系列データが $AR(1)$ モデルに従っていると考えられる場合に、$AR(1)$ パラメータ ϕ_0, ϕ_1 を推定して、Y_6 を予測せよ。(最小二乗法、標本自己相関を用いる方法それぞれで考えよ。) さらに、最小二乗法の場合に ε_t の分散を推定せよ。

問題 3 左図のような 2 つの三角形からなる図の頂点 0,1,2,3,4,5 のいずれかの位置を時間の経過とともに移動していく粒子を考える。点 k ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) に粒子があるという条件のもとで (それ以前の経過とは無関係に)、次の 1 秒後には辺で結ばれた他の頂点にランダムに移動するものとする: 即ち、例えば 1 からは 0,2,3,4 にそれぞれ 1/4 の確率で、3 からは 1,4 にそれぞれ 1/2 の確率で移動するものとする。
このとき、点 k から出発した粒子が 5 に到達する以前に 0 に到着する確率を p_k ($k = 1, 2, 3, 4$) とする。



□ (1) p_k ($k = 1, 2, 3, 4$) を p_j ($j = 1, 2, 3, 4,\ j \neq k$) で表わせ。

□ (2) p_k ($k = 1, 2, 3, 4$) を求めよ。

問題 4 ある町の天候を調べたところ、晴れの日の翌日に晴れ、曇り、雨となる確率はそれぞれ、0.7, 0.2, 0.1 であり、曇りの日の翌日は晴れ、曇り、雨の順に 0.3, 0.5, 0.2、雨の日の翌日はそれぞれ 0.2, 0.5, 0.3 であったという。このモデルはマルコフ連鎖となることに注意して、以下を解け。

□ (1) このモデルの推移確率を求めよ。ただし、晴れ、曇り、雨を順に状態 1, 2, 3 と考えよ。

□ (2) 本日が晴れであれば、3 日後に晴れる確率と、曇る確率を求めよ。

□ (3) 晴れの日の極限確率と曇りの日の極限確率を求めよ。　([D], モデリング 例題 3.1–3)

---

[1] このノートは次の URL からダウンロード (dvi-file) できます。　http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/

文献: [D] Durrett: Essentials of Stochastic Processes, Springer.　[F] Fuller: Introduction to Statistical Time Series, 2nd ed., Wiley. [R1] Ross: Simulation, 3rd ed., Academic Press. [R2] Ross: Introduction to Probability Models, 8th ed., Academic Press.

問題 5 ある銀行の窓口を訪れる客の数はポアソン過程 $\{N_t\}$ に従っており、1 時間当たり 10 人が訪れるという。($E[N_1]=10$ の意味である。)

□ (1) 最初の 6 分間に 2 人の客が訪れたとして、以下の条件付確率を求めよ。
(a) 最初の 3 分間に 2 人とも訪れた。 (b) 後半の 3 分間に 1 人以上が訪れた。

□ (2) 10 人目の客が訪れる時刻の確率密度関数を求めよ。 ([D], モデリング 3.6 練習問題 1, 12)

問題 6

□ (1) $\{N_t\}$ をレイト λ のポアソン過程とし ($E[N_1]=\lambda$ の意味)、S_n をその n 回目のクレームの発生するまでの時間とする。このとき、次を求めよ。
(a) $E[S_3|N_1=2]$ (b) $E[N_4-N_2|N_1=3]$ (c) $E[N_4|S_2=1]$ ([R2])

□ (2) $U_1, U_2, \ldots$ を一様分布 $(0,1)$ に従う確率変数列とし、$N=\min\{\,n\,;\,U_1+U_2+\cdots+U_n>1\,\}$ とする。$E[N]$ を求めよ。 ([R2], *cf*. モデリング p.3-7)

□ (3) $\{B_t\}$ をブラウン運動とするとき、$0<s<t$ に対し $E[{B_s}^2 e^{B_t}]$ を求めよ。 (*cf*. モデリング p.3-10)

問題 7

□ (1) 次の手順で確率変数 Z を生成する: ([R1], *cf*. モデリング p.4-15)
手順 1: 独立で平均 1 の指数分布に従う 2 つの確率変数 Y_1, Y_2 を生成する。
手順 2: $Y_2-(Y_1-1)^2/2>0$ のとき、$Y=Y_2-(Y_1-1)^2/2$ とおき手順 3 に進み、そうでなければ手順 1 に返る。
手順 3: $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を生成し、$U\le 1/2$ であれば $Z=Y_1$ とおき、$U>1/2$ であれば $Z=-Y_1$ とおき終了する。
(a) 手順 2 の Y と手順 3 の Z の確率密度関数をそれぞれ求めよ。
(b) X, Y が独立であることを示せ。
(c) 手順 2 を通過するまでの回数の分布を調べよ。(確率関数を求めよ。)

□ (2) 次の保険の 4ヶ月の純支払額のシミュレーション結果を求めよ。 (モデリング p.4-26)
1 ある保険会社はある町の除雪コストをカバーしている。期間は 4ヶ月間である。
2 月々10,000 の保険料を徴収する。
3 保険会社は、その町の月々の除雪コストは独立で、平均 15,000, 標準偏差 2,000 の正規分布に従っていると想定している。
4 累積密度関数の逆関数を用いる方法で 4ヶ月間の純支払額をシミュレートした。(小なる確率変数は、小額の純支払額に対応するとする。)
5 $[0,1]$ 区間の一様分布として、次の確率変数を得た。
0.5320 0.1100 0.0013 0.7925
(注意: アクチュアリー試験 数学の付表を用い、必要ならば線形近似することで累積密度関数の逆関数の値を求めよ。)

□ (3) $[0,1]$ 区間の一様分布に従う確率変数 X に対して、$\theta=E[e^X]$ をシミュレーションによって計算したい。このとき、負の相関法として $(e^X+e^{1-X})/2$ を用いると、その分散は e^X の分散の $\boxed{}$ % に抑えられる。$\boxed{}$ に入る答を小数点第 2 位を四捨五入して小数点第 1 位まで求めよ。ただし、$e=2.718$ とせよ。

以上