生命保険数学 問題7　(平成20年11月12日)　(制限時間: 60分)

1. 次の [　　] に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け (脚注に注意[1])。

(1) $\overline{A}_{xy:\overline{n}|} = 1 - [\ \delta\ ]\,\overline{a}_{xy:\overline{n}|}$

(2) $A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A^{1}_{y:\overline{n}|} - [\ A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|}\ ]$

(3) $A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = v[\ \ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}\ ] - a_{\overline{xy}:\overline{n}|}$

(4) ${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{[\ \ddot{a}_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t}|}\ ]}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}}$

(5) $a_{xy|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} v^t [\ {}_tq_{xy}\ ]\,{}_tp_z$

(6) $a_{xy|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{xy}\, v^t\, {}_tp_z [\ \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}\ ]$

(7) $a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - [\ a_{xy:\overline{m-1}|}\ ]$

(8) $a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = a_{x|y:\overline{n}|} + a_{x|z:\overline{n}|} - [\ a_{x|yz:\overline{n}|}\ ]$

(9) $a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} v^t [\ {}_tq^{1}_{xy}\ ]\,{}_tp_z$

(10) $a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q^{2}_{xy}\, v^t\, {}_tp_z [\ \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}\ ]$

(11) $a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} - a_{x\overset{2}{y}|z:\overline{n}|} = [\ a_{x|yz:\overline{n}|}\ ]$

(12) $\overline{A}_{\underset{21}{xy\overset{3}{z}}:\overline{n}|} = \displaystyle\int_0^n v^s [\ {}_sq^{\,2}_{yz}\ ]\,{}_sp_x\, \mu_{x+s}\, ds$

(13) $A_{x\overset{2}{y}:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} - [\ A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|}\ ]$

(14) $\overline{P}_{\overset{1}{x}yz:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{A}_{\overset{1}{x}yz:\overline{n}|}}{[\ \ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}\ ]}$

(15) $\overline{A}_{x\overset{2}{y}:\overline{n}|}$ の年払保険料は $\dfrac{\overline{A}_{x\overset{2}{y}:\overline{n}|}}{[\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ ]}$ となる。

(16) $q_x^A = q_x^{A*}\left\{[\ 1 - \frac{1}{2}(q_x^{B*} + q_x^{C*}) + \frac{1}{3} q_x^{B*} q_x^{C*}\ ]\right\}$

(17) $q_x^{A*} = \dfrac{q_x^A}{[\ 1 - \frac{1}{2}(q_x^B + q_x^C)\ ]}$ (近似式)　(18) $q_x^{B*} = \dfrac{2m_x^B}{2 + [\ m_x^B\ ]}$ (近似式)

(19) $l_x = a - bx$ のとき、各年齢での解約率 q_x^W が死亡率 q_x の n 倍であれば、絶対死亡率は $q_x^* = 1 - \dfrac{l_x - k_1 b}{l_x - k_2 b}$, ただし、$k_1 = [\ \dfrac{n+2}{2(n+1)}\ ]$, $k_2 = [\ \dfrac{n}{2(n+1)}\ ]$ となる。

(20) 脱退力が $\mu_x^A = \dfrac{1}{100-x}$, $\mu_x^B = \mu_x^C = \dfrac{1}{2(80-x)}$ とするとき、${}_{20}q_{20}^A = [\ \dfrac{5}{24}\ ]$.

2. 次を計算基数を用いて表せ。[2]

(21) $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$

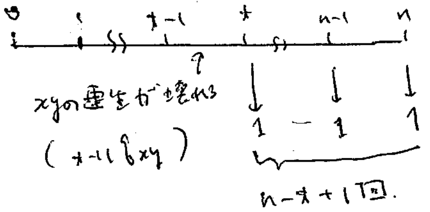
(22) $A_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + A_{y:\overline{n}|} - A_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} + \dfrac{M_y - M_{y+n} + D_{y+n}}{D_y} - \dfrac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$

(23) $\overline{P}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} = \dfrac{\overline{M}^{1}_{xy} - \overline{M}^{1}_{x+n,y+n}}{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}.$

(24) $\overline{A}_{x\overset{2}{y}:\overline{n}|} \underset{(13)}{=} \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - \overline{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x} - \dfrac{\overline{M}^{1}_{xy} - M^{1}_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$ 〃

[1] (14), (15), (24) の保険料は契約が消滅するまで払い込まれるものとする。(16)–(18), (20) は脱退事由 A, B, C の3重脱退を考えるものとし、(16)–(19) は脱退は一年を通じて一様に起こるものとする。

[2] $D_x, N_x, M_x, \overline{M}_x, D_{xy}, N_{xy}, M_{xy}, \overline{M}_{xy}, M^{1}_{xy}, \overline{M}^{1}_{xy}$ などを用いて表せ。

1. (6) 

左図より与式を得る。

(10)も同様。

(11) $${}_tq_{\overset{1}{x}y} - {}_tq_{x\overset{2}{y}} = \int_0^t \left({}_sp_{xy}\,\mu_{x+s} - {}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,{}_{t-s}q_{y+s}\right) ds$$

$$= \int_0^t {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,\underbrace{{}_sp_y\,{}_{t-s}p_{y+s}}_{={}_tp_y}\, ds = {}_tp_y\,{}_tq_x$$

より (左辺) $= \sum_{t=1}^{n} v^t\left({}_tq_{\overset{1}{x}y} - {}_tq_{x\overset{2}{y}}\right){}_tp_z\,dt = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tq_x\,{}_tp_{yz} = a_{x|yz:\overline{n|}}$ //

(13) ${}_tq_{\overset{2}{x}y} = {}_tq_x - {}_tq_{\overset{1}{x}y}$ より明らか。

(14) 保険の契約は x, y, z の連生が壊れるまで。

(15) 〃 は x の死亡時まで。

(16) [覚えておくこと]

考え方: X^A: 脱退事由がAのみのときの脱退までの時刻

X^B, X^C も同様に定めると

X^A, X^B, X^C は独立で $P(X^A < s) = {}_sq_x^{A*}$ $(0 \le s \le 1)$ (B, Cも同様)

即ち $f_{X^A}(s) = q_x^{A*}$

よって $q_x^A = P(X^A < 1,\ X^B > X^A,\ X^C > X^A)$

$$\underset{?}{=} \int_0^1 \underbrace{P(X^B > s)}\,P(X^C > s)\,f_{X^A}(s)\,ds$$

独立性 $= 1 - P(X^B < s) = 1 - {}_sq_x^{B*}$

$$= \int_0^1 \left(1 - {}_sq_x^{B*}\right)\left(1 - {}_sq_x^{C*}\right) q_x^{A*}\,ds = (\text{右辺})$$ //

(17) 覚えておく。

(18) $$m_x^B = \frac{b_x}{\int_0^1 l_{x+s}\,ds} = \frac{b_x}{\frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})}$$ (b_x: B脱退者数)

$l_x - l_{x+1} = a_x + b_x + c_x$

$$q_x^{B*} \doteqdot \frac{q_x^B}{1 - \frac{1}{2}(q_x^A + q_x^C)} = \frac{b_x}{2l_x - (a_x + c_x)} = \frac{b_x}{2l_x - (l_x - l_{x+1} - b_x)}$$

$$= \frac{b_x}{l_x + l_{x+1} + b_x} = \frac{2m_x^B}{2 + m_x^B}$$ //

(19) 解約数 w_x、死亡数 d_x とすると $q_x^W = \dfrac{w_x}{l_x}$, $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ で

$$w_x + d_x = l_x - l_{x+1} = b, \quad w_x = n \cdot d_x$$

$$\therefore \quad d_x = \frac{1}{n+1} b, \quad w_x = \frac{n}{n+1} b.$$

$$\therefore 1 - q_x^* = 1 - \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x^W} = \frac{l_x - \frac{1}{2} w_x - d_x}{l_x - \frac{1}{2} w_x} = \frac{l_x - \frac{n+2}{2(n+1)} b}{l_x - \frac{n}{2(n+1)} b}$$ //

(20)

$$ {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{x+s}^A + \mu_{x+s}^B + \mu_{x+s}^C)\, ds\right) \overset{(*)}{=} \frac{100 - x - t}{100 - x} \cdot \frac{80 - x - t}{80 - x}$$

(*) ド・モアブルのモデルで

$$\exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\omega - x - s} ds\right) = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}$$ を覚えておけば、

$$\exp\left(-\int_0^t (\mu_{x+s}^A + \mu_{x+s}^B + \mu_{x+s}^C) ds\right) = \cancel{\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{100-x-s} ds\right)}$$

$$= \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{100 - x - s}\right) \cdot \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{80 - x - s}\right)$$ と変形すればよい。

よって

$$ {}_{20}q_{20}^A = \int_0^{20} {}_s p_{20}\, \mu_{20+s}^A\, ds = \int_0^{20} \frac{\cancel{80-s}}{80} \cdot \frac{60-s}{60} \cdot \frac{1}{\cancel{80-s}}\, ds$$

$$= \frac{1}{\cancel{80} \cdot \cancel{60}_{2}} \left(\cancel{60}_{3} \cdot \cancel{20} - \frac{1}{2} \cancel{20^2} \right) = \frac{5}{24}$$ //