生命保険数学 問題2　(平成20年~~9~~10月~~29~~8日)

1. 次の空欄に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け。

(1) $L_x = \int_0^1 [\ l_{x+t}\ ]\, dt$　　(2) $\displaystyle\sum_{t=x}^{\omega-1} L_t = [\ T_x\ ]$

(3) $\mathring{e}_x = \dfrac{[\ T_x\ ]}{l_x}$　　(4) $m_x = \dfrac{d_x}{[\ L_x\ ]}$

(5) 定常人口の社会で、x 歳と $x+n$ 歳の間で死亡するものの平均年齢は

$x + \dfrac{[\ T_x - T_{x+n} - n\, l_{x+n}\ ]}{l_x - l_{x+n}}$ である。(cf. p.2)

(6) l_{x+t} $(0 \le t \le n)$ が直線と仮定すると、${}_nm_x = \dfrac{{}_nq_x}{[\ n(1 - \frac{1}{2}\,{}_nq_x)\ ]}$ と表せる。(cf. p.2)

(7) $[\ \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}\ ] = 1 + vp_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}$　　(8) $A^1_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x [\ A^1_{x+1:\overline{n-1}|}\ ]$

(9) $\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = [\ {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\ ]$　　(10) $A^1_{x:\overline{m+n}|} - A^1_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ \ 1} \cdot [\ A^1_{x+m:\overline{n}|}\ ]$

(11) $A^1_{x:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} [\ v^t\ ] \cdot {}_{t-1|}q_x$　　(12) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} [\ \ddot{a}_{\overline{t}|}\ ] \cdot {}_{t-1|}q_x + [\ \ddot{a}_{\overline{n}|}\ ] \cdot {}_np_x$

(13) $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d [\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ ]$　　(14) $vN_x - [\ N_{x+1}\ ] = M_x$

(15) $M_x = [\ D_x\ ] - dN_x$　　(16) $R_x = [\ N_x\ ] - dS_x$

2. 次を計算基数を用いて表せ。

(17) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$　　(18) $A_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$

(19) ${}_{f|}A^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_x}$　　(20) $(Ia)_{x:\overline{n}|} = \dfrac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{D_x}$

3. 生保標準生命表1996男性／計算基数表(利率 $i = 2\%$)を用いて以下の数値を求めよ。

(21) ${}_{35|}\ddot{a}_{30}$　(小数第4位を四捨五入せよ) $= \dfrac{N_{65}}{D_{30}} = 6.09847$　6.098

(22) $A^{\ 1}_{30:\overline{35}|} \times 1{,}000$万　(小数第1位を四捨五入せよ) $= 1000万 \cdot \dfrac{M_{30} - M_{65}}{D_{30}} = 896{,}064.7$

896,065

(23) $(IA)^{\ 1}_{30:\overline{35}|}$　(小数第4位を四捨五入せよ)

$= \dfrac{R_{30} - R_{65} - 35 \cdot M_{65}}{D_{30}} = 2.1708$　2.171

1.(5)　X：(0)の余命　とする。求める値 $= E[X \mid x < X < x+n]$

$$E[X \mid x < X < x+n] = \frac{\int_x^{x+n} t f_X(t)\,dt}{\int_x^{x+n} f_X(t)\,dt}$$

$$分母 = \int_x^{x+n} f_X(t)\,dt = P(x < X < x+n) = {}_x p_0 - {}_{x+n} p_0 = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_0}$$

$$分子 = \int_x^{x+n} t\left(-\frac{d}{dt}({}_t p_0)\right) dt \quad \cancel{t\,(-{}_t p_x)'\,dt}$$

$$= \left[-t\,{}_t p_0\right]_x^{x+n} + \int_x^{x+n} {}_t p_0\,dt$$

$$= x\,{}_x p_0 - (x+n)\,{}_{x+n} p_0 + \frac{T_x - T_{x+n}}{l_0}$$

$$= x({}_x p_0 - {}_{x+n} p_0) + \frac{T_x - T_{x+n} - n\,l_{x+n}}{l_0}$$

よって

$$E[X \mid x < X < x+n] = x + \frac{T_x - T_{x+n} - n\,l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}} \quad //$$

(6)

$${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_0^n l_{x+t}\,dt} = \frac{l_x - l_{x+n}}{\frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})} = \frac{l_x - l_{x+n}}{n\left(l_x - \frac{1}{2}(l_x - l_{x+n})\right)}$$

$$= \frac{{}_n q_x}{n\left(1 - \frac{1}{2}\,{}_n q_x\right)} \quad //$$