基礎ゼミ　1組,2組　　2008年7月7日

74.　$f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ $(0 \le x \le 1)$ とおくとき次を調べよ。

(1)　$\{f_n(x)\}$ の極限　　(2)　$\{f_n(x)\}$ は $[0,1]$ 上一様収束するか?　　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$

75.　次で与えられる $f_n(x)$ と I に対し、$\{f_n(x)\}$ が I 上で一様収束をするか調べよ。[1]

(1)　$f_n(x) = nx^n,\ I = [0,a]$　$(0 < a < 1)$　　(2)　$f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2},\ I = (-\infty,\infty)$

(3)　$f_n(x) = n^p x e^{-nx^2},\ I = (-\infty,\infty)$ $(p > 0)$　　(4)　$f_n(x) = nx(1-x)^n$　$I = [0,1]$

76.　次で関数項級数が I 上で一様収束するか調べよ。[2]

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},\ I = (-\infty,\infty)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx},\ I = [0,1]$　　(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx},\ I = (0,\infty)$

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x),\ I = (-\infty,\infty)$　$(|a| < 1,\, b \in \mathbf{R})$　　(5)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^p x^2},\ I = (-\infty,\infty)$　$(p > 2)$

77.　$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$ に対し、(1) $f(x)$ は連続, (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)^4}$, (3) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$ を証明せよ。[3]

78.　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1)　σ, τ を互換の積として表せ。また、σ, τ の転倒数を求めよ。

(2)　$\sigma\tau$, $\tau\sigma$ を求めよ。

(3)　τ^{-1} を求めよ。また、τ^{-1} の転倒数を求めよ。

(4)　$\rho\sigma = \tau$ となる ρ を求めよ。

79.　次の行列式を計算せよ。

(1)　$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　　(2)　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　　(3)　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

(4)　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ b & b & x & b \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$　　(5)　$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　(6)　$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}$

---

[1] 一様収束するのは (1), (3) $p < 1$ のとき. hint: まず各点収束の極限を調べる。

[2] 一様収束するのは (1), (4), (5).

[3] hint: (1) は教科書 p.141 定理 9 の条件を, (2) は定理 10 (2) の条件を (3) は定理 11 (2) の条件を満たすことをまず調べる。そのためには Weierstrass の M-判定法が有効。

(7) $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$ (9) $\begin{vmatrix} a & a & a & a & x \\ a & a & a & x & a \\ a & a & x & a & a \\ a & x & a & a & a \\ x & a & a & a & a \end{vmatrix}$

(10) $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ (11) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

注意: (7), (11) で $n \geq 3$ とする。また、(7) は $n+1$ 次正方行列、(10), (11) は n 次正方行列とする。

80. 次の 1 次方程式系をクラメルの公式を用いて解け。

(1) $\left.\begin{aligned} 2x + y + 4z &= -1 \\ 3x + 2y + z &= 7 \\ 4x + 3y + 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$ (2) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 4 \\ x + 3y + 5z &= 3 \end{aligned}\right\}$