基礎ゼミ　1 組,2 組　　2008 年 6 月 30 日

65.　次の定積分の値を求めよ[1]。(広義積分も含む。注意せよ。)

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x(4-x)}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin\theta)\,d\theta$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx \quad (0 \le \alpha < 1)$

(7) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx \quad (a>0)$　(8) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a<b)$　(9) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$

(10) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx \quad (n\in\mathbf{N})$　(11) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx$　(12) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad (n\in\mathbf{N})$

66.　次の広義積分が収束することを確かめよ[2]。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^p} \quad (0<p<1)$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^2}\,dx \quad (\alpha>0)$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}}$　(5) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha>0)$　(6) $\displaystyle\int_\pi^\infty \sin(x^\alpha)\,dx \quad (\alpha>1)$

67.　ベータ関数 $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ (p,q>0)$ について次を示せ。

(1) $B(p,q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,q)$　(2) $B(p,q)=\dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (p,q\in\mathbf{N})$

68.　e^x の Maclaurin 展開式に形式的に $x=i\theta$ $(i=\sqrt{-1})$ を代入して、$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (*cf*. p.1 (3) Euler の公式) を導け。[3]

69.　$2<e<3$ であることと e^x に Maclaurin の定理を用いることにより、e が無理数であることを示せ。

70.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n!e)=0$ を示せ。

71.　次の関数の Maclaurin の展開式を示せ。

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \quad (|x|<1)$　(2) $\displaystyle\sin^2 x=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad (x\in\mathbf{R})$

(3) $\displaystyle\frac{\log(1+x)}{1+x}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \qquad (|x|<1)$

72.　$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき次を示せ。ただし、l'Hoptal の定理を用いるときは、不定形であることを明記せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x=\sqrt[3]{abc}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x=\max\{a,b,c\}$

73.　次の極限値を求めよ。ただし、l'Hoptal の定理を用いるときは、不定形であることを明記せよ。[4]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x\right)^{\frac{1}{x}}$

---

[1] ヒント: (1) 円の面積に帰着せよ。(3) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおく。(4) $t=\pi-x$ とせよ。
[2] ヒント: (1)–(4) 教科書 p.118 定理 7 を用いるとよい。
[3] 複素関数論の講義 (解析学 I) で習うが、一般に複素数 z に対しは $e^z=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}z^n$ と定める。
[4] ヒント: (5) は $t=\frac{\pi}{2}-x$, (6) は $t=\frac{\pi}{2}-\arctan x$ とまずおいて変形せよ。