基礎ゼミ　1 組,2 組　　2008 年 6 月 16 日

58.　次の行列 A の階数を求めよ。a は定数とする。

(1) $\begin{pmatrix} a-3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & a+1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & a+2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & a+1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

59.　次の行列 A の逆行列を求めよ。a, b, c は定数とする。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

60.　次の 1 次方程式系を解け。a, b は定数とする。

(1) $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=a \\ 2x+3y+5z=2a-1 \\ 3x+ay+8z=2a+4 \end{array}\right\}$　(2) $\left.\begin{array}{r} x+4y+3z=1 \\ 2x+9y+7z=3 \\ ay+2z=b \end{array}\right\}$　(3) $\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$

61.　n 次行列 P に対して、$E+P$ は正則であるとし、$A=(E-P)(E+P)^{-1}$ とおく。

(1)　$E+A$ は正則であることを示せ。

(2)　$P=(E-A)(E+A)^{-1}$ であることを示せ。

(3)　P が直交行列であるとき、A は交代行列である、即ち、${}^tA=-A$ となること示せ。

(3)　$P=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき、A を求めよ。ただし、$\theta \neq (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ とする。

62.　平均値の定理または Taylor の定理を用いて次を示せ。

(1)　$f(x)$ が $(0,\infty)$ で微分可能のとき、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\alpha.$

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a).$ ただし、$f(x)$ が点 a を含む区間で C^2 級とする。

(3)　$f(x)$ が点 a を含む区間で 3 回微分可能で $f'''(x)$ が連続とする。$f'''(a)\neq 0$ ならば、h に対し θ を $f(a+h)=f(a)+f'(a)+hf'(a)+\dfrac{1}{2!}f''(a+\theta h)$ で定めるとき、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}.$

63.　Taylor の公式 (または Maclaurin の公式) を使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

64.　電卓を利用して次を考察せよ。

(1)　e^x に Maclaurin の公式を適用して、e の近似値を小数第 2 位まで求めたい。x の何乗の項まで考えればよいか? また、そのときの値を求めよ。ただし、$2<e<3$ は既知とする。

(2)　$x=0.5236(\fallingdotseq \pi/6)$ のとき、$\sin x$ の Maclaurin 展開式の x^5 の項までの和が 0.5000000 と小数第何位まで一致するか調べよ。また、$\cos x$ についても x^4 の項までの和が $0.8660254(\fallingdotseq \sqrt{3}/2)$ と小数第何位まで一致するか調べよ。

(3)　次の近似値を小数第 5 位まで求めよ。　(a) $\log 2$　(b) $\sqrt[3]{126}$ (ヒント: $5^3=125$)