**基礎ゼミ　1 組,2 組**　　2008 年 5 月 26 日

**39.**　次の等式を示せ。

(1)　$\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$2\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$　　(3)　$4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$

(4)　$\arcsin x=\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(5)　$\arcsin\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\arccos x & (0\le x\le 1)\\ \pi-\arccos x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$

**40.**　次の極限値を求めよ[1]。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{(\arccos x)^2}{x-1}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$　　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

**41.**　次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$\arccos(\sin x)$　　(2)　$\arcsin(\cos x)$　　(3)　$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$

(4)　$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$　　(5)　$\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

**42.**　次の関数の $n$ 次導関数を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　　(2)　$e^x\cos x$　　(3)　$x^3\cos 2x$　　(4)　$\sin^3 x$　　(5)　$x^{n-1}\log x$

**43.**　$f(x)$ が $n$ 回微分可能とするとき、$\left\{x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ となることを示せ。

**44.**　$f(x)=\arctan x$ に対し、$\dfrac{d^n y}{dx^n}=(n-1)!\cos^n y\,\sin\left(ny+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n=1,2,\ldots)$ を示せ。

**45.**　$y=\arctan x$ のとき、次を示せ。

(1)　$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$

(2)　$f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(x)=(-1)^m(2m)!$　　((1) を用いよ。)

**46.**　$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$ に対し、以下を示せ。

(1)　$H_{n+1}(x)=xH_n(x)-nH_{n-1}(x)$

(これより、$H_n(x)$ が $n$ 次多項式であることがわかる。これを Hermite 多項式と呼ぶ。)

(2)　$H_n'(x)=nH_{n-1}(x)$

(3)　$H_n''(x)-xH_n'(x)+nH_n(x)=0$ (Hermite の微分方程式)

**47.**　次の媒介変数表示の関数から $dy/dx$ および $d^2y/dx^2$ をそれぞれ求めよ。

(1)　$x=a\left(t+\dfrac{1}{t}\right),\ y=a\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$　　(2)　$x=a\cos t,\ y=b\sin t$

**48.**　$f(x)$ は微分可能とする。このとき、方程式 $f(x)=0$ の隣り合う 2 つの解の間において、方程式 $f'(x)=0$ は少なくとも 1 つの解をもつことを Rolle の定理より示せ。

[1] ヒント: $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ を用いよ。例えば、(2) は $t=\arccos x$, (4) は $t=\frac{\pi}{2}-\arctan x$ とおけ。