基礎ゼミ　1 組,2 組　　2008 年 5 月 19 日

29. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき次を示せ。

(1) $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ が自然数の増加列のとき $\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という。$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ に対し $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ を示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。(ヒント：$a, b \in \mathbf{R}$ に対して $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ を用いよ。)

(3) $a_n > 0$ $(n \geq 1)$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ を示せ。[1]

30. 数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散するとき、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ も ∞ に発散することを示せ。

31. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{4 + 2a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $0 < a_n < 4$ を示せ。　(2) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。　(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。[2]

32. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left({a_n}^2 + 1\right)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $0 \leq a_n \leq 3$ を示せ。　(2) $\{a_n\}$ が単調減少であることを示せ。　(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

33. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2 + a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。
$\{a_n\}$ が Cauchy の判定条件をみたすことを示し、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。[3]

34. $f(x) \to A$ $(x \to a)$ のとき、$|f(x)| \to |A|$ $(x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ。

35. $x \to +0$ のとき $\sin \dfrac{1}{x}$ が収束をしないことを、ε-δ 論法に基づいて説明せよ。

36. 次の極限値を求めよ。[4]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{1 - (1-2x)^{1/3}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{|x^2 - x - 2|}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$　(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x^2-1)}{\sin(x-1)}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 - 3x + x^2)^{1/x}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{4}{x + 2x^2}\right)^x$　(10) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$

37. 中間値の定理を用いて、以下を示せ。

(1) $f(x)$ が $[0,1]$ で連続で $0 < f(x) < 1$ をみたせば、$f(x) = x$ は $0 < x < 1$ において少なくとも一つ解を持つ。

(2) $f(x)$ が有界閉区間 $I = [a,b]$ で連続ならば、$f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ を満たす $c \in I$ が存在する。

(3) $f(x)$ が $[-1,1]$ で連続であって $f(1) = f(-1) = 0$ ならば、原点を通る直線は $y = f(x)$ のグラフと必ず交わる。

38. 次の逆三角関数に関する値を求めよ[5]。

(1) $\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2}\right)$　(2) $\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(3) $\arctan \dfrac{\sqrt{3}+1}{1 - \sqrt{3}\cdot 1}$

---

[1] ヒント: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ の場合に分けて考える必要があります。

[2] ヒント: (1), (2) より「有界な単調数列は収束する」から $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと、$\alpha = \sqrt{4 + 2\alpha}$ を満たす。即ち、この方程式を解けばよい。問題 **32** も同様。

[3] ヒント: Cauchy の判定条件をみたすことがわかれば、$\{a_n\}$ は収束列。よってその極限を α とすると、$\alpha = 2 + \frac{1}{2+\alpha}$ の解。

[4] ヒント: (5), (6), (7) は $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ に, (8), (9), (10) は $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ に帰着せよ。

[5] $\arcsin, \arccos, \arctan$ はそれぞれ逆三角関数 $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ を表す。